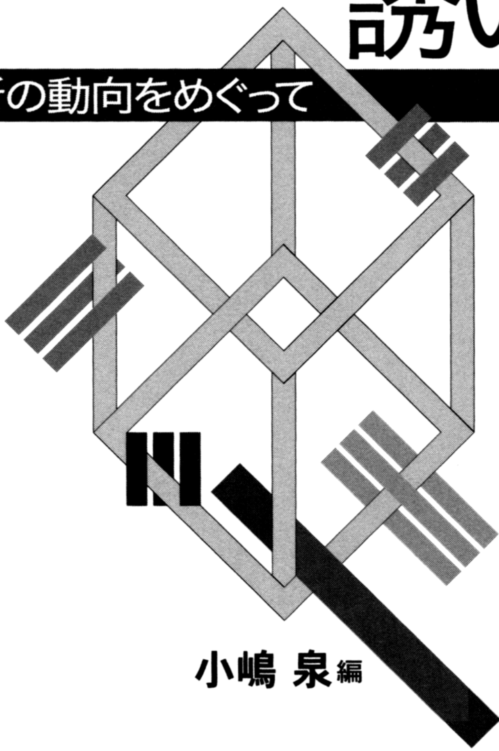
数理物理への誘い6

最新の動向をめぐって



小嶋 泉 編

遊星社

数理物理への誘い6

目　　次

装丁＝海保　透

既刊の内容

（第3～5集は p.176 参照）

まえがき

『数理物理への誘い』というこのシリーズの由来について，すでに『数理物理への誘い１～５』のいずれかの巻を手に取ったことのある読者に改めて繰り返す必要はないかも知れませんが，この巻で初めて接するという方もきっと多いことでしょう．手短かにそれを説明したいと思います．

この本のシリーズは，1987 年に荒木不二洋，江沢洋両先生が始められ，以後現在まで続いているサマースクール「数理物理」と深く結びついています．このサマースクールは，2001 年までほぼ毎年学習院大学で，2002 年以降は河東泰之先生と私がその世話人を引き継いで東京大学（駒場キャンパス）で開催されてきました．「サマー」スクールとはいえ実際の開催時期は例年９月頃，大体４日間の日程で，数理物理学の領域で重要な，または，重要になりそうなトピック，テーマを選んで，「大学３～４年生から大学院生，高校の数学や物理の先生，そして社会の数学ファンなどに数理物理の現在を大まかに紹介することを目的とした」講義（江沢洋先生,『数理物理への誘い』「まえがき」より）を，数学・物理両サイドからほぼ同数の先生方にお願いしてきました．

講義に先立って講師の先生方には予めその内容を書いた予稿原稿をお願いして予稿集を参加者にお配りしていますが，その予稿原稿をもとにして，「講義で何を言いたかったのか，そのモチーフとエッセンスを，やさしくお話しふうに紹介」したのがこのシリーズです．こういう企画が実現できたのはひとえに,「一般の教科書などでは味わうことのできない，自由で楽しく，先への見通しがつくような数学書をモットーと」した数学・数理科学関係の書籍出版を心掛けて来られた遊星社・西原昌幸代表のご理解とご尽力の賜物で，

2003 年までの講義内容が 5 冊の本,『数理物理への誘い 1 〜 5』として遊星社から出版されてきました.

今回その第 6 冊目である『数理物理への誘い 6』に収録されたのは，2004 年と 2005 年のサマースクールでの講義とその予稿集に基づく内容で，以下にその概要をかいつまんでご紹介したいと思います．原則として各話題は独立しており，どこから読んでも差し支えない構成のはずですが，それはバラバラで無関係なトピックスの寄せ集めという意味では決してありません．実際，講師の先生方から頂いた原稿を改めて通読すると，当初必ずしも意図されていなかった論理的つながりの網目がいつの間にか巧妙に張り巡らされ，全体としてあるひとまとまりの世界が浮かび上がってくるような感慨を覚えるのは大変興味深いことです.

さて，第 1 話から第 4 話までは，2004 年開催のサマースクール「頂点作用素代数とモンスター」の内容を網羅しています．頂点作用素代数は可積分系や共形場理論をはじめとする数学・物理学・数理物理学のきわめて広い領域で活躍し，活発に研究されている無限次元リー代数のあるクラスの総称で，第 1 話，粟田英資先生の「頂点作用素の物理」は，このテーマへの大変明解で平易な入門を与えています．頂点作用素代数の起源は，局所スケール変換の下で不変な 2 次元量子場を記述する共形場理論で，その無限小共形変換が作るヴィラソロ代数それ自体，一つの頂点作用素代数を構成します．自由ボゾン代数，ヴィラソロ代数やアフィン・リー代数等が具体的な形で順次説明され，重要な役割を演ずるのは，作用素係数の形式的ベキ級数とそれらの積を与える演算子積展開です．第 2 話と第 3 話のテーマは，頂点作用素代数とモンスター群，その両者のつながりで，山田裕理先生の「モンスター単純群と頂点作用素代数」は，McKay らによる「ムーンシャイン予想」の説明から話が始まります．「ムーンシャイン (moonshine)」とは「非現実的な，または，馬鹿げた話や考え」と辞書にあり，巨大位数とはいえ有限個の元から

なるモンスター単純群と無限次元リー代数という，一見何の関係もなさそうな二つの数学的対象の間に隠されたつながりを読み取ることの不思議さ,「異常さ」の反語的表現でしょうか?　この問題に直結する頂点作用素代数の構造と共にそこで実現されるモンスター群の既約表現の解析を通じて，謎解きが進行します．頂点作用素代数からのモンスター群という視角に対し，第3話，吉荒聡先生の「最大位数の散在型単純群，モンスターの構造について」は，有限群論の立場で見たモンスター群から出発して，逆方向にこのつながりを見ることになります．正直のところ，専門外の者にはこれはかなりハードなテーマと私自身は思いますが，幸い吉荒先生は，2回掛けると1になるinvolutionの元とその中心化群，極大部分群とその分類，部分群の集まりとそれらの重なり具合からもとの群を再構成する「アマルガム」という概念に「コセット幾何」等々といういくつかの重要なポイントを明示し，そこから得られる幾何学的描像から頂点作用素代数とのつながりへ読者を導く工夫をして下さっています．第4話，脇本実先生の「W 代数の話 ~ スーパー・コンフォーマル代数の表現論へ」では,「ルート系・不変内積・ワイル群」の「3点セット」を持たない「スーパー・コンフォーマル代数」の構造・表現を解明するため，頂点作用素代数も含めたアフィン・リー代数を交換子・反交換子両方を持つ形に「スーパー化」した「アフィン・スーパーリー代数」とその表現論から出発し，それらを「スーパー・コンフォーマル代数とその表現論へ移す関手」として機能する「W 代数」が論じられます．ただしその定義は複雑で，具体例と機能を重視した議論展開がなされます．

次の第5話から第8話は，2005年「ランダム行列」での講義内容を網羅するもの．第5話，日合文雄先生・植田好道先生の「ランダム行列と自由確率論」では，Voiculescuが創始した自由確率論と，自由独立性，大偏差原理についての簡潔にして要を得た導入から始まり，それが行列サイズを大きくした極限でのランダム行列で精度良く近似される，という興味深い話が展開さ

れます．自由確率論の舞台となる「自由代数」は，生成子の間に課された関係式は一切なし，という最も強い非可換性を持つ代数ですが，それが「ランダム行列」と深くつながるのは不思議な気がします．次の第6話，香取眞理先生・種村秀紀先生の「ランダム行列と非衝突過程」は，このランダム行列をブラウン運動・確率過程論・確率微分方程式の視点から見るお話で，確率変数がエルミート行列に値を取る GUE (Gaussian unitary ensemble) と対称行列に値を取る GOE (Gaussian orthogonal ensemble) との違いがこれらを支配する確率過程論の定常・非定常の違いから詳しく議論されます．第7話，永尾太郎先生の「行列のブラウン運動と量子準位統計」では，ブラウン運動の歴史を Einstein に遡って基本的なアイディアを踏まえ，その自然な拡張としてブラウン運動する行列という統一的な見方から，GUE や GOE 等のランダム行列の異なる確率法則が相互につながり合う様子が論じられます．面白いのは，その具体的表示において4元数や反対称行列の「平方根」に相当するパフィアンが果たす重要な役割です．最後の第8話，中村勝弘先生の「量子カオスの現在と未来」では，量子論誕生前夜，1900年ケルヴィン卿の予言的な講演から説き起こして，エルゴード仮説を巡る研究を追跡し，ランダム行列の理論も Calogero-Moser-Sutherland 系に基づくエネルギー準位の非線型動力学，量子カオスの文脈に位置づけ，量子力学を非線型化する方向に将来展望を見ようとする議論がなされています．

なおこのサマースクール「数理物理」は，今後もしばらくは東京大学駒場キャンパスで開催される予定です．下記河東先生のウェブページにはこれまでの情報，これからの予定が掲載されており，最新の情報はそちらをご覧ください． http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp-old.htm

2006年7月　　　　小嶋　泉

第1話

頂点作用素の物理

栗田英資

1　はじめに

頂点(作用素)代数つまりカイラル代数は主に，局所スケール変換に対して不変な2次元の系を記述する共形場理論から生まれてきた概念です．共形場理論はその不変性を統制するヴィラソロ代数などの無限次元の代数で特徴づけられ，その表現論を調べることにより系の物理的情報のほとんどを読み取る手法を与えてくれます．特に，重力を含む相互作用の統一理論として有力視されている超弦理論や2次元の物性系における臨界現象などに応用され大きな成果をあげています．

2次元の系ですので，座標を複素数 z とその共役 $\bar{z}$ で表すと，対称性を担う代数は z と $\bar{z}$ のそれぞれに依存する部分に分けることができ，その片方のみを取り出したものがカイラル代数です．共形場理論ではヴィラソロ代数以外にも数多くのカイラルな対称性が活躍し，それらの多くは頂点作用素代数と呼ばれています．そのような頂点作用素代数の物理的な背景を具体的な例，自由ボゾン代数やヴィラソロ代数などを通して紹介してゆきます．

また，共形場理論において技術的に重要な演算子積展開 (OPE) の計算は，できるだけ詳しく紹介します．OPE の計算法を習得していただくこともこの解説のひとつの目標です．

2　自由ボゾン代数

まず，場の量子論で重要な役割を演じる自由ボゾンについて紹介します．ハイゼンベルク頂点代数とも呼ばれ，頂点作用素代数の基本的な具体例となっています．

2.1　自由ボゾン

自由ボゾン代数 $\mathcal{H} = \langle a_n \rangle_{n \in \mathbf{Z}}$ [1] とは

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0} \tag{2.1}$$

を満たす生成子 a_n $(n \in \mathbf{Z})$ で生成される無限次元代数です．ただし $[A, B] = AB - BA$ は交換子です．a_0 は全ての元と可換ですが，それと非可換となる新たな元を後で付け加えます．これは量子力学で活躍する調和振動子の代数（ハイゼンベルク代数）$[a, a^\dagger] = 1$ が，モードと呼ばれる量子数 $n \in \mathbf{N}$ に対応して $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}a_n, \frac{1}{\sqrt{n}}a_{-n}\right] = 1$ のように可算無限種類あるものです．a_{-n}, a_n $(n \in \mathbf{N})$ はそれぞれ波長 $1/n$ に対応する粒子を生成，消滅する演算子で，場の量子論において重要な役割を演じます．

生成子 a_n たちをそのまま扱うよりも，場と呼ばれるそれらの生成母関数

$$J(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^{-n-1} \tag{2.2}$$

を考えた方が便利です．この無限和は，収束のことは考えない形式的ベキ級数で，和や微分，積分などは項別に行うことにします．z は形式的変数ですが，必要に応じて複素変数と考えたりもします．$\oint \frac{dz}{2\pi i}$ を z^{-1} の係数つまり留数を取り出す写像とすると，生成子 a_n は逆に

$$a_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J(z) \tag{2.3}$$

[1] $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ整数全体，自然数全体，複素数全体の集合を表す．

と復元することができます.

自由ボゾン代数の場合，この場はカレントと呼ばれ，後に紹介するカレント代数の特殊な場合となっています．z^{-n-1} の指数のズレの 1 は後で説明するようにスケール次元と呼ばれています．変数 z を複素変数とし，リーマン面上の座標と考えると，粒子を生成消滅させる場所という意味を持ちます．また，$z = e^{ix}$ $(i = \sqrt{-1}, x \in \mathbf{R})$ の場合は $zJ(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikx}$ というフーリエ展開の形になりますので，a_k は波数 k の振動に対応する展開係数にあたります.

2.2 交換関係とデルタ関数

生成母関数 (2.2) を用いて (2.1) は

$$\begin{aligned}[a_n, J(w)] &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} [a_n, a_m] w^{-m-1} \\ &= nw^{n-1} = \partial_w w^n, \qquad \partial_w = \frac{\partial}{\partial w},\end{aligned} \tag{2.4}$$

もしくは

$$\begin{aligned}[J(z), J(w)] &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{-n-1}[a_n, J(w)] \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} nz^{-n-1}w^{n-1} = \frac{1}{z}\partial_w \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{w}{z}\right)^n,\end{aligned} \tag{2.5}$$

と書き換えることができます．逆にこれらの z や w による各展開係数を比べることにより，もともとの生成子 a_n の交換関係を導出することもできますので，(2.1), (2.4) と (2.5) はみな同等です．ここで,

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^n \tag{2.6}$$

という形式的ベキ級数（**デルタ関数**）を導入すると

$$[J(z), J(w)] = \frac{1}{z}\partial_w \delta\left(\frac{w}{z}\right) \tag{2.7}$$

となります．このデルタ関数 $z^{-1}\delta(w/z)$ を加法的に $\delta(z-w)$ と書く場合もあります．

デルタ関数 $\delta(z)$ は次のような性質を持っています．まず，z での展開の各係数は 1 なので，$\oint \frac{dz}{2\pi i}\delta(z)=1$ です．また，任意の $f(z)\in \mathbf{C}[z,z^{-1}]$ に対し（つまり $f(z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}} f_m z^m$ が有限和なら）$\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} f_m z^{m+n}=\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} f_m z^n$ なので，

$$\delta(z)f(z)=\delta(z)f(1) \tag{2.8}$$

となり，これらより

$$\oint \frac{dz}{2\pi i}\delta(z)f(z)=f(1) \tag{2.9}$$

という普通のデルタ関数としての性質が従います．微分に対しては各項ごとに微分し，$(\delta(z)f(z))'=\delta'(z)f(z)+\delta(z)f'(z)$ および，任意の $g(z)=\sum_{m\in\mathbf{Z}} g_m z^m$ に対し $\oint \frac{dz}{2\pi i}g'(z)=0$ より

$$\oint \frac{dz}{2\pi i}\delta'(z)f(z)=-f'(1) \tag{2.10}$$

となります．また，$\delta(z)=z\delta(z)$ を微分することにより，

$$(1-z)\,\delta^{(n)}(z)=n\,\delta^{(n-1)}(z),\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2.11}$$

が従います．もちろんデルタ関数の自乗 $\delta(z)^2$ は，形式的ベキ級数として意味のないものです．同様に，任意の $f(z,w)\in\mathbf{C}[z,z^{-1},w,w^{-1}]$ に対し，

$$\delta\left(\frac{w}{z}\right)f(z,w)=\delta\left(\frac{w}{z}\right)f(z,z),\qquad \oint\frac{dw}{2\pi iz}\delta\left(\frac{w}{z}\right)f(z,w)=f(z,z) \tag{2.12}$$

となります．

また $z=e^{ix}$ $(x\in\mathbf{R})$ の場合は，$\delta(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}e^{ikx}$ という見慣れた形のデルタ関数です．$z\in\mathbf{C}$ とすると，デルタ関数 $\delta(z)$ は $|z|<1$ での展開

$(1-z)^{-1}=\sum_{n\geq 0} z^n$ と $|z|>1$ での展開 $(z-1)^{-1}=z^{-1}(1-1/z)^{-1}=\sum_{n<0} z^n$ を両方混ぜてしまったようなもので，解析接続するとゼロとなります：

$$\delta(z) \sim \frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-1} \sim 0, \qquad z \neq 1. \tag{2.13}$$

ですから (2.7) は，解析接続の意味で，同一点以外 $(z \neq w)$ においてカレントが可換であること（局所性）を表しています.

2.3　演算子積展開 (OPE)

粒子間の相互作用は基本的には近接作用ですので，粒子が近づいて結合したらどうなるかとか，分解したらどうなるかを考えるのが重要となります. そのために，カレント $J(z)$ の積を考えることにしましょう.

ただし，形式的ベキ級数の積は注意が必要で，例えば，$\sum_{n<0} z^n$ と $\sum_{n>0} z^n$ の積は，z による展開の各係数が無限和となり，意味がありません. 同様にカレント同士の積を考える場合も，変数 z が同じもの同士の積には困難がありますが，変数の異なる $J(z)$ と $J(w)$ の積は，z と w による展開の各係数が有限和ですので，z および w に関する形式的ベキ級数として意味があります. そのようにしてまず，異なる点 $z \neq w$ におけるカレントの積を考え，その極限 $z \to w$ での発散の度合いを調べて同一点におけるカレントの積の性質を調べることにしましょう.

自由ボゾン代数は非可換環なので，積の順序に注意する必要があります. そこで規準となる順序を決めておきます. 便利で代表的な順序としては，消滅演算子つまり正のモード $(n>0)$ の生成子を右に並べるというものがあります. ここでは，ボゾン代数の元 $\mathcal{O} \in \mathcal{H}$ に対し $:\mathcal{O}:$ としたものを，正のモードの生成子を右に並べるお約束（**正規順序**）を表す線形写像とします.

つまり

$$\begin{aligned}
{:}\alpha\mathcal{O}+\beta\mathcal{O}'{:} &= \alpha{:}\mathcal{O}{:}+\beta{:}\mathcal{O}'{:}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbf{C}, \quad \mathcal{O},\mathcal{O}'\in\mathcal{H},\\
{:}a_n\mathcal{O}{:} &= a_n{:}\mathcal{O}{:}\,\theta(n\le -1)+{:}\mathcal{O}{:}\,a_n\,\theta(n>-1),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

です．ただし，$\theta(P)$ は命題 P の真偽に応じてそれぞれ 1, 0 という値をとるステップ関数です．例えば ${:}a_3a_{-3}{:}=a_{-3}a_3$ や ${:}a_2a_3a_{-3}a_{-2}{:}={:}a_3a_{-3}a_{-2}{:}a_2=a_{-3}a_{-2}a_3a_2$ などとなります．またボゾンは，正モード同士や負モード同士は互いに可換なので，正規順序の中は順番によらないこと ${:}\mathcal{O}\mathcal{O}'{:}={:}\mathcal{O}'\mathcal{O}{:}$ に注意してください．

ここで $J_+(z)=\sum_{n>-1}a_nz^{-n-1}$ および $J_-(z)=\sum_{n\le -1}a_nz^{-n-1}$ とすると，${:}J(z)\mathcal{O}{:}=J_-(z)\mathcal{O}+\mathcal{O}J_+(z)$ なので，カレントの積との差は

$$\begin{aligned}
J(z)\,\mathcal{O}-{:}J(z)\,\mathcal{O}{:} &= [\,J_+(z),\mathcal{O}\,], \qquad \mathcal{O}\in\mathcal{H},\\
\mathcal{O}\,J(z)-{:}J(z)\,\mathcal{O}{:} &= -[\,J_-(z),\mathcal{O}\,],
\end{aligned} \tag{2.15}$$

のように $J_\pm(z)$ との交換関係になります．特に $\mathcal{O}=J(w)$ の場合は

$$\begin{aligned}
[\,J_+(z),J(w)\,] &= \sum_{n>-1}nz^{-n-1}w^{n-1}=\frac{1}{z}\partial_w\sum_{n>0}\left(\frac{w}{z}\right)^n,\\
[\,J_-(z),J(w)\,] &= \sum_{n\le -1}nz^{-n-1}w^{n-1}=-\frac{1}{w}\partial_z\sum_{n>0}\left(\frac{z}{w}\right)^n,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

です．これらはそれぞれ，$(z-w)^{-2}=\partial_w(z-w)^{-1}$ の $|w/z|<1$ もしくは $|z/w|<1$ でのテイラー展開に等しいので，そのように略記すると

$$\begin{aligned}
J(z)J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}+{:}J(z)J(w){:}, \qquad |w/z|<1,\\
J(w)J(z) &= \frac{1}{(w-z)^2}+{:}J(z)J(w){:}, \qquad |z/w|<1,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

と表せます．これを演算子積展開 (**OPE**) と呼びます．(2.17) は片方だけではカレントの交換関係の半分しか記述しませんが，${:}J(z)J(w){:}={:}J(w)J(z){:}$

ですから (2.17) の両式は同等です．よって，この場合の OPE は片方の式だけで交換関係と同等の情報を持っていると言えます．

$z \to w$ での発散の状況は 2 位の極であることが分かりました．真性特異点ではないということが重要です．正規順序積の部分は，交換関係に寄与しませんのでそれほど重要ではありません．ですから極の部分だけを取り出して，$J(z)J(w) \sim (z-w)^{-2}$ と表す場合もあります．OPE をこのように有理関数で略記しますが実際には，左の場の変数が右の場の変数よりも大きい場合のテイラー展開に対応した形式的ベキ展開という意味です．

2.4　フォック表現

ボゾン代数の最高重み表現 $\mathcal{F}_\alpha$ は，

$$a_n|\alpha\rangle = 0, \quad (n > 0), \qquad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (\alpha \in \mathbf{C}) \tag{2.18}$$

という最高重み状態 $|\alpha\rangle$ で生成される自由ボゾン加群，つまり

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv (\, a_{-1}, a_{-2} \cdots \text{の多項式}\,) \times |\alpha\rangle \tag{2.19}$$

として定義され，**フォック表現**と呼ばれ，またその元は状態と呼ばれます．α はカレントのゼロモードの値ですのでチャージと呼ばれます．特に $\alpha = 0$ の場合の $|0\rangle$ は全ての消滅演算子で消されるので，粒子がいない状態を表し，かつチャージがゼロですので，真空状態に対応しています．他の $\mathcal{F}_\alpha$ 元は，真空に生成演算子 $a_{-1}, a_{-2}, \cdots$ を作用させ，対応する粒子が生成された状態です．状態 $a_{-n_1} \cdots a_{-n_r}|\alpha\rangle$ $(n_i > 0)$ に対し $\sum_{i=1}^{r} n_i$ をその状態の次数と呼びます．

状態 $\mathcal{O}|\alpha\rangle \in \mathcal{F}_\alpha$ にカレント $J(z)$ を作用させると，新たな（z 付）フォック表現の元 $J(z)\mathcal{O}|\alpha\rangle$ となります．状態 $\mathcal{O}|\alpha\rangle$ に場所 z においてカレント $J(z)$ が注入され別の状態 $J(z)\mathcal{O}|\alpha\rangle$ に変化したわけです．この状況を絵で

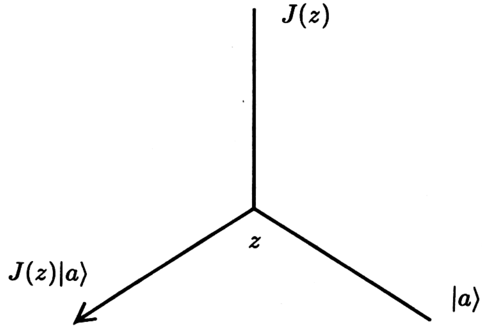


図 1　頂点作用素

描くと，ベンツのマークのような三つ又の枝のように表現できるため，このような性質を持った演算子 $J(z)$ は**頂点作用素**と呼ばれます．

具体的にその状況を見てみましょう．特に，真空 $|0\rangle$ にカレント $J(z)$ を作用させると，$J(z)|0\rangle = \sum_{n\geq 1} a_{-n} z^{n-1}|0\rangle$ のように非負モードが消えるため $z=0$ とでき，

$$J(0)|0\rangle = a_{-1}|0\rangle \tag{2.20}$$

となります．また，$\partial_z^m J(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(n-1)(n-2)\cdots(n-m)a_{-n}z^{n-1-m}$ ですので，同様にして

$$\frac{1}{m!}\partial_z^m J(0)|0\rangle = a_{-m-1}|0\rangle \tag{2.21}$$

となります．複数のカレントに対しても，正規順序にしておけばやはり非負モードが真空に作用して消えるため $z=0$ とでき，

$$:\frac{1}{m_1!}\partial_z^{m_1}J(0)\cdots\frac{1}{m_r!}\partial_z^{m_r}J(0):|0\rangle = a_{-m_1-1}\cdots a_{-m_r-1}|0\rangle \tag{2.22}$$

となり，場と状態が真空を通して1対1に対応しています．この対応

$$:\frac{1}{m_1!}\partial_z^{m_1}J(z)\cdots\frac{1}{m_r!}\partial_z^{m_r}J(z): \quad\longleftrightarrow\quad a_{-m_1-1}\cdots a_{-m_r-1}|0\rangle \tag{2.23}$$

を，場‐状態対応と呼び，この場を例えば $Y(a_{-m_1-1}\cdots a_{-m_r-1}|0\rangle, z)$ などと表すことがあります．特に $Y(a_{-1}|0\rangle, z) = J(z)$ です．

2.5 相関関数

双対フォック表現 $\mathcal{F}_\alpha^\dagger$ も同様に，双対状態 $\langle\alpha|$

$$\langle\alpha|a_{-n} = 0, \quad (n > 0), \qquad \langle\alpha|a_0 = \alpha\langle\alpha|, \quad (\alpha \in \mathbf{C}) \tag{2.24}$$

で生成される自由ボゾン加群として定義されます．また，ボゾン代数の元 $\mathcal{O} \in \mathcal{H}$ に対し，その**相関関数**（行列要素）を $\langle\alpha|\mathcal{O}|\beta\rangle = \langle\alpha|(\mathcal{O}|\beta\rangle) = (\langle\alpha|\mathcal{O})|\beta\rangle$ で定めます．$\langle\alpha|a_0|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle\beta = \alpha\langle\alpha|\beta\rangle$ より $\langle\alpha|\beta\rangle = c\,\delta_{\alpha,\beta}$, $c \in \mathbf{C}$ となりますが，$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ と規格化しておきます．特に $\alpha = \beta = 0$ の場合は真空期待値と呼ばれています．例えば，$\langle 0|a_1 a_{-1}|0\rangle = \langle 0|[a_1, a_{-1}]|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$ です．正規積の真空期待値は $\langle 0|{:}J(z)J(w){:}|0\rangle = 0$ などのように消えます．これと OPE より，カレントの真空期待値も次のように簡単に計算できます：

$$\langle 0|J(z)|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|J(z)J(w)|0\rangle = \frac{1}{(z-w)^2}, \qquad |w/z| < 1. \tag{2.25}$$

三つ以上のカレントの積の真空期待値もウィックの定理を用いて簡単に求められます．それは n 個のカレントの積の縮約

$$c\left(J^1(z_1)\cdots J^n(z_n)\right) \equiv J^1(z_1)\cdots J^n(z_n) - {:}J^1(z_1)\cdots J^n(z_n){:} \tag{2.26}$$

は，次のように 2 個の縮約に分解できる

$$c\left(J^1(z_1)\cdots J^n(z_n)\right) = \sum_{combination} \prod_{pair} c\left(J^i(z_i)J^j(z_j)\right) {:}\text{残り}{:}, \tag{2.27}$$

という定理です．具体的には

$$c(J^1J^2J^3) \;=\; c(J^1J^2)J^3 + c(J^1J^3)J^2 + c(J^2J^3)J^1,$$

$$\begin{aligned} c(J^1J^2J^3J^4) &= c(J^1J^2)c(J^3J^4) + c(J^1J^3)c(J^2J^4) + c(J^1J^4)c(J^2J^3) \\ &+ c(J^1J^2) {:} J^3J^4 {:} + c(J^1J^3) {:} J^2J^4 {:} + c(J^1J^4) {:} J^2J^3 {:} \\ &+ c(J^2J^3) {:} J^1J^4 {:} + c(J^2J^4) {:} J^1J^3 {:} + c(J^3J^4) {:} J^1J^2 {:}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

などとなります．ウィックの定理自身はハウスドルフの公式を用いて簡単に証明できます．ウィックの定理を用い次の OPE の結合則も示すことができます：

$$(J(z_3)J(z_2))\,J(z_1) = J(z_3)\,(J(z_2)J(z_1))\,.$$

3　ヴィラソロ代数

ヴィラソロ代数は頂点代数の骨組みのようなものです．共形変換つまり局所的スケール変換（等角写像）を表し，共形不変な系の物理的情報を取り出す際に有効となります．

3.1　ヴィラソロ代数

ヴィラソロ代数 $\mathcal{V}ir = \langle L_n \rangle_{n\in\mathbf{Z}}$ は

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{3.1}$$

という関係を満たす L_n $(n \in \mathbf{Z})$ で生成される無限次元リー代数です．c は全ての生成子と可換な中心（**中心電荷**）で，ここでは，代数をパラメトライズするある数 $c \in \mathbf{C}$ としておきます．$c = 0$ とした代数はヴィット代数と呼ばれています．ヴィット代数の非自明な中心拡大はヤコビ恒等式をかせば一意的でヴィラソロ代数だけであることが示せます．

生成母関数を

$$T(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}L_n z^{-n-2} \tag{3.2}$$

としましょう．z の指数のズレ $h=2$ はスケール次元と呼ばれているものです．交換関係 (3.1) は，生成母関数を用いて次のようにも表現できます：

$$\begin{aligned}[L_n,T(w)] &= \frac{c}{12}(n+1)n(n-1)w^{n-2}+\sum_{m\in\mathbf{Z}}(2(n+1)-m-2)\,L_m w^{n-m-2} \\ &= \left\{\frac{c}{2}\frac{\partial_w^3}{3!}+2T(w)\partial_w+(\partial_w T(w))\right\}w^{n+1},\end{aligned} \tag{3.3}$$

もしくは

$$[T(z),T(w)]=\left\{\frac{c}{2}\frac{\partial_w^3}{3!}+2T(w)\partial_w+(\partial_w T(w))\right\}\frac{1}{z}\delta\left(\frac{w}{z}\right). \tag{3.4}$$

やはり解析接続の意味で，同一点以外での可換性を表しています．

自由ボゾンの場合と同様に $z=0$ で発散する部分のモード $n>-h$ は真空に作用した際に消えてほしいので，正規順序 $:\mathcal{O}:$ をそれらを右に並べるお約束とします．つまり，

$$:L_n\mathcal{O}:=L_n:\mathcal{O}:\theta(n\le -h)+:\mathcal{O}:L_n\,\theta(n>-h),\qquad \mathcal{O}\in\mathcal{V}ir \tag{3.5}$$

です．ボゾンに対する正規順序と混同しないようにわざと別の記号で書いておきました．ボゾンの場合とは異なり $:L_n\mathcal{O}:\neq:\mathcal{O}L_n:$ であることに注意してください．すると，ヴィラソロ生成子の交換関係 (3.1) は次の OPE

$$\begin{aligned}T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4}+\frac{2T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial_w T(w)}{z-w}+:T(z)T(w):,\qquad |w/z|<1,\\ T(w)T(z) &= \frac{c/2}{(w-z)^4}+\frac{2T(w)}{(w-z)^2}-\frac{\partial_w T(w)}{w-z}+:T(z)T(w):,\qquad |z/w|<1,\end{aligned} \tag{3.6}$$

と同等であることが分かります．ここで $(z-w)^{-n}$ と $(w-z)^{-n}$ はそれぞれ w/z と z/w の正ベキで展開された形式的ベキ展開の略記です．また，ボゾンの正規積とは異なり，$:T(z)T(w):\neq:T(w)T(z):$ です．

スケール変換に対する振る舞いは重要です．変換

$$\begin{aligned} z &\mapsto z' \equiv \lambda z, \qquad \lambda \in \mathbf{C} \\ L_n &\mapsto L'_n \equiv \lambda^n L_n, \end{aligned} \tag{3.7}$$

に対してヴィラソロ代数 (3.1) は不変ですが，その母関数は，スケール次元 $h = 2$ つまり

$$T(z) \mapsto T'(z') = \lambda^{-2} T(z)$$

となるように (3.2) で z の指数を 2 だけずらして定義されています．また，(3.4) は，スケール変換に対し各項とも λ^{-4} を出します．

中心が $c = 0$ の場合に，ヴィラソロ代数の幾何的意味を見てみましょう．

$$\ell_n = -z^n D, \qquad D = z\partial_z \tag{3.8}$$

とすると $Dz^n = z^n(D+n)$ という関係から，ℓ_n $(n \in \mathbf{Z})$ が $c = 0$ のヴィラソロ代数つまりヴィット代数の微分作用素表現になっていることが分かります．関数 $f(z)$ への ℓ_n の作用（無限小変換）を

$$\ell_n : f(z) \mapsto (1 - \varepsilon \ell_n) f(z), \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{3.9}$$

とすると，$\ell_n : z^m \mapsto (1 + \varepsilon m z^n) z^m$ なので，等角写像を表します．例えば $n = -1$ は平行移動，$n = 0$ は ε の実数部分がスケール変換で虚数部分が回転，$n = 1$ は反転して平行移動してまた反転するいわゆる特殊共形変換です．

共形場理論はこのような等角写像，つまり場所ごとに倍率が異なる局所的なスケール変換に対して不変もしくは共変（良い振る舞いをするよう）な系を記述する理論です．弦理論や臨界点直上の 2 次元統計系などはこの共形不変性を用いて詳しく解析されています．

3.2 最高重み表現

この代数の最高重み表現 $\mathcal{V}_h$ は,

$$L_n|h\rangle = 0, \quad (n > 0), \qquad L_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad (h \in \mathbf{C}) \tag{3.10}$$

という最高重み状態 $|h\rangle$ で生成されるヴィラソロ加群，つまり

$$\mathcal{V}_h \equiv (\, L_{-1}, L_{-2} \cdots \text{の多項式}\,) \times |h\rangle \tag{3.11}$$

として定義されます．双対状態 $\langle h|$ や相関関数 $\langle h'|\mathcal{O}|h\rangle$ $(\mathcal{O} \in \mathcal{V}ir)$ も同様に定義され $\langle h'|h\rangle = \delta_{h',h}$ と規格化しておきます[2].

正規順序を定義した際のモードの分割 $n > -h$ との違いに注意してください．正規順序積を真空 $|0\rangle$ に作用させた場合は消えてほしいのですが，いまの定義ですと $L_0|0\rangle = 0$ ですが，$L_{-1}|0\rangle$ は消えません．そこで付加的に

$$L_{-1}|0\rangle \sim 0 \tag{3.12}$$

という条件（真空の並進不変性）を課すことにしますが，その意味は次の節で述べます．また，この条件のもとでは $T(0)|0\rangle = L_{-2}|0\rangle$ となりますので

$$T(z) \quad \longleftrightarrow \quad L_{-2}|0\rangle \tag{3.13}$$

という場-状態対応があります.

[2] L_0 固有値に縮退がある場合は注意が必要です．例えば二つの状態 $|h,0\rangle$ と $|h,1\rangle$ が

$$L_0 \begin{bmatrix} |h,1\rangle \\ |h,0\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 1 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |h,1\rangle \\ |h,0\rangle \end{bmatrix}$$

となり対角化不可能な場合は次のようになり

$$\begin{bmatrix} \langle h',1|h,1\rangle & \langle h',1|h,0\rangle \\ \langle h',0|h,1\rangle & \langle h',0|h,0\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \delta_{h',h}, \qquad a, b \in \mathbf{C}$$

$\langle h',0|h,0\rangle = 1$ とはできません．また，このような場合の相関関数は対数関数的振る舞いをします.

ここで相関関数の例を示しましょう．

$$\langle h|L_1 L_{-1}|h\rangle = 2h. \tag{3.14}$$

$$M_2 \equiv \begin{bmatrix} \langle h|L_2 L_{-2}|h\rangle & \langle h|L_2 L_{-1}^2|h\rangle \\ \langle h|L_1^2 L_{-2}|h\rangle & \langle h|L_1^2 L_{-1}^2|h\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4h+\frac{c}{2} & 6h \\ 6h & 4h(1+2h) \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

このような行列の行列式をカッツ行列式といい，いまの場合

$$\begin{aligned} \det M_2 &= 32h\left(h^2+(c-5)\frac{h}{8}+\frac{c}{16}\right) \\ &= 32(h-h_{1,1})(h-h_{1,2})(h-h_{2,1}) \\ h_{1,1} &= 0, \\ 16h_{1,2} &= 5-c-\sqrt{(1-c)(25-c)}, \\ 16h_{2,1} &= 5-c+\sqrt{(1-c)(25-c)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

となります．特に退化している場合（カッツ行列式 $=0$ ）が重要です．

3.3　特異状態

この最高重み表現 $\mathcal{V}_h$ は一般には規約ではなく，表現空間の中に

$$L_n|\chi\rangle = 0, \quad (n>0), \qquad L_0|\chi\rangle = (h+N)|\chi\rangle, \quad (N\in\mathbf{N}) \tag{3.17}$$

のような**特異場** $|\chi\rangle \in \mathcal{V}_h$（次数 $N\in\mathbf{N}$）がいくつか存在することがあります．ですから規約表現を得るには，そのような特異状態が生成する余計な部分を差し引いておく必要があります：

$$\text{既約表現} = \mathcal{V}_h \;/\; (\text{特異状態}\ |\chi\rangle\ \text{たちで生成される加群}). \tag{3.18}$$

そこで特異状態が，いつどこに出現するかを見切っておくことが重要ですが，3.2 節のカッツ行列式の零点の解析から，次のことが分かっています．

定理. [K1, FF]　中心電荷を

$$c = 13 - 6\,(\beta + 1/\beta) \tag{3.19}$$

のように $\beta \in \mathbf{C}_{\neq 0}$ で表した場合，最高重み h が

$$h_{rs} = \frac{(r\beta - s)^2 - (\beta - 1)^2}{4\beta}, \qquad r, s \in \mathbf{Z}_{>0} \tag{3.20}$$

となる表現の次数 $N = rs$ に特異状態が必ず出現する．また β が一般の場合はただ一つしか現れない．

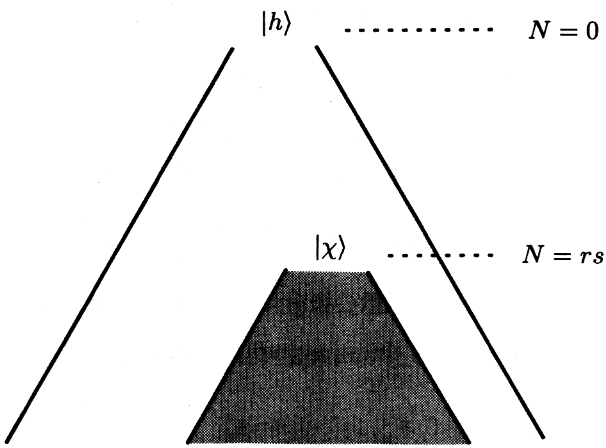


図 2　特異状態を持つ最高重み表現

ここで，特異状態 $|\chi_{rs}\rangle \in \mathcal{V}_{h_{rs}}$ の例をいくつか示しましょう：

$$\begin{aligned} |\chi_{11}\rangle &= L_{-1}|h_{11}\rangle, \\ |\chi_{12}\rangle &= \left(L_{-1}^2 - \frac{1}{\beta}L_{-2}\right)|h_{12}\rangle, \\ |\chi_{13}\rangle &= \left(L_{-1}^3 - \frac{4}{\beta}L_{-2}L_{-1} - \frac{2}{\beta}\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)L_{-3}\right)|h_{13}\rangle. \end{aligned} \tag{3.21}$$

$h_{11} = 0$ ですので $L_{-1}|0\rangle$ は特異状態となり，それを含む真空期待値は

$\langle 0|\mathcal{O}L_{-1}|0\rangle = 0$ $(\mathcal{O} \in \mathcal{V}ir)$ となり消えます．上で課した付加的な条件 (3.12) は，特異状態なので表現空間から差し引くという意味です．

3.4　プライマリ場

ヴィラソロ代数の作用に対して良い振る舞いをする場を導入します．共形重み（スケール次元）h の**プライマリ場**

$$\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Phi_n z^{-n-h} \tag{3.22}$$

を次の三つの同等な交換関係で定義します：

$$\begin{aligned}
[L_n, \Phi_m] &= \{n(h-1) - m\}\Phi_{n+m}, \\
[L_n, \Phi(w)] &= w^n\{w\partial_w + h(n+1)\}\Phi(w) \\
&= \{h\Phi(w)\partial_w + (\partial_w\Phi(w))\}w^{n+1}, \\
[T(z), \Phi(w)] &= \{h\Phi(w)\partial_w + (\partial_w\Phi(w))\}\frac{1}{z}\delta\left(\frac{w}{z}\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

第 2 式右辺第一項は，ヴィット代数の微分作用素表現に対応しています．特に $[L_{-1}, \Phi(w)] = \partial_w\Phi(w)$，$[L_0, \Phi(w)] = (w\partial_w + h)\Phi(w)$ です．

OPE で表すと

$$T(z)\Phi(w) = \frac{h\Phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\Phi(w)}{z-w} + :T(z)\Phi(w):, \qquad |w/z| < 1 \tag{3.24}$$

で，$\Phi(w)T(z)$ も $|z/w| < 1$ において同じ略記で表されます．ただし正規順序は (3.5) で $\mathcal{O} = \Phi(w)$ としたものです．ヴィラソロ生成子は (3.3) から，中心 $c = 0$ ならば共形重み 2 のプライマリ場です．

さらに $\Phi_n|0\rangle \sim 0$ $(n > -h)$ という条件を課すと，$\Phi(0)|0\rangle = \Phi_{-h}|0\rangle$ であり，かつこれは重み h の最高重み状態つまり $|h\rangle$ であることが分かります．ですので，スケール次元 h のプライマリ場 $\Phi(z)$ は

$$\Phi(z) \quad \longleftrightarrow \quad |h\rangle \tag{3.25}$$

最高重み状態 $|h\rangle$ に対応します.

3.5 プライマリ場の相関関数と合成則

スケール次元 h_i のプライマリ場 $\Phi_i(w)$ の最高重み状態での行列要素 $\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle h_3|\,[\,L_0,\,\Phi_2(z)\,]\,|h_1\rangle &= (z\partial_z + h_2)\,\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \\ &= (\,h_3 - h_1\,)\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \end{aligned} \tag{3.26}$$

から

$$\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \propto z^{h_3-h_2-h_1} \tag{3.27}$$

が分かります. 一般の状態での行列要素 $\langle h_3|\mathcal{O}'\Phi_2(z)\mathcal{O}|h_1\rangle$ $(\mathcal{O},\,\mathcal{O}' \in \mathcal{V}ir)$ も

$$[L_n, \Phi(z)\mathcal{O}] = z^n\{z\partial_z + h(n+1)\}\Phi(z)\mathcal{O} + \Phi(z)[L_n, \mathcal{O}] \tag{3.28}$$

を用いて, 最高重み状態での行列要素に帰着させることができます.

特異状態 $|\chi_{r,s}\rangle \sim 0$ を含む行列要素は消えること

$$\langle h_3|\Phi_2(z)|\chi_{r,s}\rangle = 0 \tag{3.29}$$

を要請することにより, $\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \neq 0$ となる必要条件（合成則）を与えることができます. 特に h_2 も (3.20) で与えられる場合は次のようになります.

命題. $h_1 = h_{r_1,s_1}$, $h_2 = h_{r_2,s_2}$ に対し, $\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \neq 0$ ならば $h_3 = h_{r_3,s_3}$

$$\begin{aligned} r_3 &= r_1 + r_2 - (2m+1), \qquad m = 0, 1, \cdots, \min(r_1, r_2), \\ s_3 &= s_1 + s_2 - (\,2n+1), \qquad n = 0, 1, \cdots, \min(s_1, s_2), \end{aligned} \tag{3.30}$$

となる.

$\langle h_3|\Phi_2(z)|h_1\rangle \neq 0$ となる場合は $\langle h_3|\mathcal{O}\Phi_2(z)|h_1\rangle \neq 0$ ともなりえます．よってプライマリ場の最高重み状態への作用は一般に

$$\Phi_2(z)|h_1\rangle = \sum_{k,\mathbf{n}} C^k_{2,1}(z,\mathbf{n}) L_{-n_\ell} \cdots L_{-n_1}|h_k\rangle \tag{3.31}$$

となります．ここで k の和は合成則が成立する最高重みに関する和を表し，$\mathbf{n} = \{n_1, \cdots, n_\ell\}$ の和はそれらの最高重み表現での和を表します．プライマリ場の OPE は，この合成則および相関関数の値から

$$\Phi_1(z)\Phi_2(w) = (z-w)^{h_3-h_2-h_1}\Phi_3(w) + O\left((z-w)^{h_3-h_2-h_1+1}\right) \tag{3.32}$$

となりますが，この初項の場 $\Phi_3(w)$ もまた，スケール次元 h_3 のプライマリ場であることが示せます．

中心が特殊な値の場合は特に重要です．(3.19) の β が互いに素な二つの自然数 $p, q \in \mathbf{N}$ で $\beta = q/p$ と与えられる場合は，$h_{p-r,q-s} = h_{r,s}$ となり，複数個（実際には無限個）の特異状態が存在します．その場合，極小格子

$$\begin{aligned} &1 \leq r \leq p-1, \\ &1 \leq s \leq q-1, \qquad r, s \in \mathbf{Z} \end{aligned} \tag{3.33}$$

で合成則が閉じるという著しい性質があり，極小モデルと呼ばれています．

また，特異状態 $|\chi_{r,s}\rangle \sim 0$ を含む行列要素は消えるという要請から相関関数を特徴づける微分方程式も導出でき [BPZ]，その発見が今日の共形場理論の発展のきっかけとなりました．また特異状態は，カロジェロ・サザランド模型と呼ばれる量子多体系の励起状態の波動関数（ジャック多項式）と対応していることが分かっています [MY]．

4　ヴィラソロ代数の自由ボゾン表示

ヴィラソロ代数やその特異状態は自由ボゾンで表示できます [FF]．自由場を用いると，相関関数の計算などの表現論の解析が飛躍的に簡単になります．

4.1 フェイギン・フックス表示

ヴィラソロ生成子は，自由ボゾンを用いて

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} :a_{n-m}a_m: - (n+1)\alpha_0 a_n, \qquad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) \in \mathbf{C} \tag{4.1}$$

と表すことができます．ただし中心は $c = 1 - 12\alpha_0^2$ です．$\alpha_0 = 0$ の場合は $L_0 = \sum_{m>0} a_{-m}a_m + \frac{1}{2}a_0^2$ となり，調和振動子のエネルギー $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ の拡張になっています．生成母関数による表現は

$$T(z) = \frac{1}{2}:J(z)J(z): + \alpha_0\partial J(z) \tag{4.2}$$

となります．同一点 z における場の自乗は z の各展開係数が無限和ですが，正規順序積ですので，状態ではさんで期待値を考えれば有限和になってくれます．$\alpha_0 = 0$ の場合，(4.1) はカレントからヴィラソロを構成する菅原構成と呼ばれる手法の特別な場合になっています．

(4.1) の L_n がヴィラソロ交換関係に従うことを直接示すのは少し大変ですが，生成母関数を用いるとウィックの定理を使って次のように簡単に示せます．

$$\begin{aligned}
c\,(T(z)T(w)) &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + :(J(z)+\alpha_0\partial_z)(J(w)+\alpha_0\partial_w):\frac{1}{(z-w)^2} \\
&= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\alpha_0}{(z-w)^3}(J(z)-J(w)) + \frac{1}{(z-w)^2}:J(z)J(w): \\
&= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\alpha_0}{(z-w)^2}\partial_w J(w) + \frac{\alpha_0}{z-w}\partial_w^2 J(w) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(z-w)^2}:J(w)J(w): + \frac{1}{z-w}:J(w)\partial_w J(w): + \cdots \\
&= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \cdots .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ただし全て $|w/z| < 1$ でのテイラー展開の略記で，$+\cdots$ は $J(z)$ の $z = w$ でのテイラー展開からくる正則部分です．$c\,(T(w)T(z))$ も $|z/w| < 1$ にお

いて同じ略記で表されます．(3.6) とは正規順序が違いますので正則部分の見かけは異なります．しかし (2.11) から従う $(z-w)^{m+1}\ \partial^{(n)}\delta(w/z)=0$ $(m\geq n)$ により，正則部分は交換関係には寄与せず (3.4) が従います．

ヴィラソロ生成子と自由ボゾンの交換子は

$$[L_n, a_m] = ma_{n+m} + \alpha_0 n(n+1)\delta_{n+m,0} \tag{4.4}$$

となります．よって $\alpha_0 = 0$ の場合，カレント $J(z)$ はスケール次元 1 のプライマリ場であることが分かります．

ヴィラソロ代数の最高重み状態 $|h\rangle$ はボゾン代数の最高重み状態 $|\alpha\rangle$ を用いて，

$$|h\rangle = |\alpha\rangle, \qquad h = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0) \tag{4.5}$$

と表現され，最高重み表現もそれから生成されます．特に，特異状態を持つ表現に対しては，次のようになります：

$$|h_{rs}\rangle = |\alpha_{rs}\rangle, \quad \alpha_{rs} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((r+1)\sqrt{\beta} - (s+1)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right). \tag{4.6}$$

4.2　自由ボゾン場

スケール次元 1 以外や $\alpha_0 \neq 0$ の場合のプライマリ場をボゾンで表すこともできます．そのためにまず，自由ボゾン代数にさらに，次のような元 Q を付け加えましょう：

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad [a_n, Q] = \delta_{n,0}. \tag{4.7}$$

正規順序は例えば $:a_0 Q: = Qa_0$ などとします．生成母関数を

$$\phi(z) = -\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}a_n z^{-n} + a_0 \log z + Q \tag{4.8}$$

とするとカレントは $J(z) = \partial_z \phi(z)$ です．a_0 と Q はそれぞれ量子力学における運動量 p と位置 q にあたります．弦理論においては弦の重心運動量と重心の位置にあたり，a_n $(n \neq 0)$ は右（もしくは左）巻きの振動モードに対応します．(4.7) は生成母関数を用いて次のように書き換えることができます：

$$[a_n, \phi(w)] = w^n, \qquad [Q, \phi(w)] = -\log w \tag{4.9}$$

もしくは，

$$[\phi(z), \phi(w)] = -\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n - \log\left(\frac{w}{z}\right) = \int \frac{dz}{z}\delta\left(\frac{w}{z}\right). \tag{4.10}$$

カレントの場合と同様に，$\phi_+(z) = -\sum_{n>0} \frac{1}{n} a_n z^{-n} + a_0 \log z$ とすると

$$c\left(\phi(z)\phi(w)\right) = [\phi_+(z), \phi(w)] = -\sum_{n>0} \frac{1}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n + \log z \tag{4.11}$$

より，この右辺を $\log(z-w)$ と略記すると OPE は次のようになります：

$$\phi(z)\phi(w) = \log(z-w) + {:}\phi(z)\phi(w){:}, \qquad |w/z| < 1. \tag{4.12}$$

この場 $\phi(z)$ は，OPE に対数による多価性があるので，あまり良い場ではありません．良い場にするためにはその微分や指数関数を考える方法があります．微分は以前導入したカレント $J(z)$ です．ここでは指数関数について考えましょう．

4.3　頂点作用素

（狭義の）頂点作用素とは

$$V_\alpha(z) = \exp\left\{-\alpha \sum_{n>0} \frac{1}{n} a_{-n} z^n\right\} e^{\alpha Q} z^{\alpha a_0} \exp\left\{\alpha \sum_{n>0} \frac{1}{n} a_n z^{-n}\right\} \tag{4.13}$$

という演算子のことです．ボゾン a_n たちの級数も $\mathcal{H}$ の元と考えることにし，ボゾンに対する以前と同じ正規順序のお約束 $:**:$ を用いると

$$V_\alpha(z) = :e^{\alpha\phi(z)}: \tag{4.14}$$

と書くこともできます．その OPE は，$[A,B]$ が A, B と可換な場合のハウスドルフの公式 $e^A e^B = e^{[A,B]}e^B e^A$ および (4.11) より

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = (z-w)^{\alpha\beta} :V_\alpha(z)V_\beta(w):, \qquad |w/z| < 1 \tag{4.15}$$

となります．ただし $(z-w)^{\alpha\beta}$ は $z^{\alpha\beta}\exp\{-\alpha\beta\sum_{n>0}(w/z)^n/n\}$ の略記です．$V_\alpha(z)$ を $z=w$ でテイラー展開すると

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = (z-w)^{\alpha\beta}V_{\alpha+\beta}(w) + (z-w)^{\alpha\beta+1}:\partial_w V_\alpha(w)V_\beta(w): + \cdots, \qquad |w/z| < 1 \tag{4.16}$$

となります．ただし $:V_\alpha(w)V_\beta(w): = V_{\alpha+\beta}(w)$ を用いました．このように一般の OPE では極の係数に別の場が現れ，二つの場が近づいて結合した際にどのような新しい場になるかを表現しています．

ヴィラソロ生成子との OPE は $|w/z| < 1$ において

$$\begin{aligned} c\,(T(z)V_\alpha(w)) &= \frac{\alpha^2/2}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + :(J(z)+\alpha_0\partial_z)\frac{\alpha}{z-w}V_\alpha(w): \\ &= \frac{h}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + \frac{\alpha}{z-w}:J(z)V_\alpha(w): \\ &= \frac{h}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + \frac{\alpha}{z-w}:J(w)V_\alpha(w): + \cdots \end{aligned} \tag{4.17}$$

より，

$$\begin{aligned} T(z)V_\alpha(w) &= \frac{h}{(z-w)^2}V_\alpha(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_\alpha(w) + :T(z)V_\alpha(w): + \cdots, \\ h &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha-2\alpha_0), \qquad |w/z| < 1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

で，$V_\alpha(w)T(z)$ も $|z/w|<1$ において同じ略記で表されます．よって

$$[T(z), V_\alpha(w)] = \{hV_\alpha(w)\partial_w + (\partial_w V_\alpha(w))\}\,\frac{1}{z}\delta\left(\frac{w}{z}\right) \tag{4.19}$$

なので，$V_\alpha(z)$ はスケール次元 h のプライマリ場です．また，

$$a_n e^{\alpha Q}|0\rangle = \begin{cases} 0, & n>0 \\ \alpha e^{\alpha Q}|0\rangle, & n=0 \end{cases} \tag{4.20}$$

より，$V_\alpha(0)|0\rangle = e^{\alpha Q}|0\rangle$ が最高重み状態 $|\alpha\rangle$ であることも分かります．また，頂点作用素の相関関数は次のようになることが分かります：

$$\langle 0|V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)\cdots V_{\alpha_N}(z_N)|0\rangle = \delta_{a_1+\cdots+a_N,0}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, \qquad |z_j/z_i|<1, \quad i<j. \tag{4.21}$$

一般の相関関数も自由場表示を用いて簡単に導出できます．

4.4 遮蔽カレント

特に重要な頂点作用素である**遮蔽**（しゃへい）**カレント**を

$$S_\pm(z) = V_{\sqrt{2}\alpha_\pm}(z) = {\bf :}e^{\sqrt{2}\alpha_\pm\phi(z)}{\bf :}, \qquad \alpha_\pm = \mp\sqrt{\beta}^{\,\mp} \tag{4.22}$$

で定義すると，スケール次元は $h=1$ となるためヴィラソロ生成子との OPE が

$$T(z)S_\pm(w) = \partial_w\left(\frac{1}{z-w}S_\pm(w)\right) + {\bf :}T(z)S_\pm(w){\bf :}, \qquad |w/z|<1 \tag{4.23}$$

のように全微分になります．ですから w^{-1} の係数を拾う積分を用い

$$s_\pm = \oint\frac{dw}{2\pi i}S_\pm(w) \tag{4.24}$$

で遮蔽電荷 $s_\pm$ を定義すると，ヴィラソロ生成子と可換

$$[T(z), s_\pm] = 0 \tag{4.25}$$

であることが分かります．

最高重み状態 $|\alpha\rangle$ に遮蔽電荷を作用させた状態 $s_\pm|\alpha\rangle$ は，ヴィラソロ生成子 L_n が遮蔽電荷 $s_\pm$ をす通りするためやはり最高重み状態です．つまり特異状態になっています．ただし α は任意というわけではなく，積分が非自明に存在する条件が必要です．それを考慮に入れると，特異状態は次のように自由ボゾンで積分表示できることが分かります：

$$|\chi_{rs}\rangle = \oint \prod_{i=1}^{r} \frac{dt_i}{2\pi i} S_+(t_i)|\alpha_{-r,s}\rangle = \oint \prod_{i=1}^{s} \frac{dt_i}{2\pi i} S_-(t_i)|\alpha_{r,-s}\rangle. \tag{4.26}$$

カッツ行列式は，これを用いて計算することができます．

以上の性質を逆にヴィラソロ代数自身の定義として採用することができます．

定義.[FFr2]　ヴィラソロ代数は，ボゾンの微分多項式 $:\mathbf{C}[\partial\phi(z), \partial^2\phi(z), \ldots]:$ の空間に含まれ，遮蔽電荷 s_+ と可換なものである．

ここで，$T(z)$ が α_+ と α_- の入れ替えに対して対称なため，s_- で定義しても同じです．また，一般の W 代数も同様にして定義されます．

5　終わりに

共形場理論にはさらに多くの頂点作用素代数が登場します．曲がった空間上での弦の運動やスピン鎖などに応用されるアフィン・リー代数（カレント代数）[K2] も頂点代数の重要な具体例の一つです．自由ボゾン表示もいくつか知られています．中心の値が特殊な場合は r 種類のボゾンを用いた頂点作用素表現としてフレンケル・カッツ・ジーゲル構成と呼ばれるものがありま

す [FK]．また任意の中心に対しては，r 種類のボゾンと正ルートに対応した別の種類のボゾンの組を用いた脇本表現と呼ばれるものや [W, FFr1]，$r+2$ 種類のボゾンを用いてフレンケル・カッツ・ジーゲル的に構成した，いわゆる DDF 型の表示もあります [GN]．

重要な頂点作用素代数としては他に，ヴィラソロ代数に 2 より大きいスケール次元の場を加えた W 代数 [FL] や $W_{1+\infty}$ 代数 [AFMO]，超対称性があるように拡張された代数などがあります．また，臨界点からある特殊な方向へずれた非臨界点での挙動を統制する q-変形された代数である q-ヴィラソロ代数 [SKAO] や q-W 代数 [AKOS] などは，局所性（可換性）を持たないので頂点作用素代数の範疇には入りませんがヴィラソロ代数同様豊富な内容を持っています．ソリトン系や行列模型との関係も重要で，KP 階層の τ-関数などは頂点演算子を用いて直接表すことができます．同じ手法で，量子多体系の励起状態などを表すいろいろな対称多項式（シューア，ジャック，ホール・リトルウッド，マクドナルド多項式など）をヴィラソロ代数や W 代数などの特異状態を用いて表すこともできます [MY, AKOS]．また，位相的場の理論における分配関数や 4, 5 次元超対称ヤン - ミルズ理論の分配関数に対するネクラソフの公式も自由ボゾンを用いた頂点作用素による表示ができ，マクドナルド多項式との関係も分かってきています [AK]．

また，共形場理論の入門には [KY,Y] などが，頂点作用素代数の入門には [K3] などがあります．

参考文献

[AFMO] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo and S. Odake : *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **118** (1995), 343–374.

[AK] H. Awata and H. Kanno : *JHEP* 0505 (2005), 039.

[AKOS] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi : *Commun. Math. Phys.* **179** (1996), 401.

[BPZ] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov : *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333–380.

[FF] B.L. Feigin and D.B. Fuchs : *Funct. Anal. and Appl.* **16** (1982), 47–63; *Lect. Note in Math.* **1060**, Springer 1985.

[FFr1] B. Feigin and E. Frenkel : *Russ. Math. Surv.* 43, No. 5 (1988), 221–222.

[FFr2] B. Feigin and E. Frenkel : *Phys. Lett.* **B246** (1990), 75–81.

[FK] I.B. Frenkel and V.G. Kac : *Invent. Math.* **62** (1980), 23–66.

[FL] V. Fateev and S. Lykyanov : *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988), 507–520.

[K1] V.G. Kac : *Lect. Note in Phys.* **94** (1979), 441–445.

[K2] V.G. Kac : *Infinite-dimensional Lie algebras*, Third Edition, Cambridge University Press, 1990.

[K3] V.G. Kac : *Vertex Algebras for Beginners*, Second Edition, AMS 1998.

[GN] R.W. Gebert and H. Nicolai : *J. Math. Phys.* **38** (1997), 4435–4450.

[KY] 川上則雄，梁 成吉 :『共形場理論と１次元量子系』，岩波書店，1997.

[MY] K. Mimachi and Y. Yamada : *Commun. Math. Phys.* **174** (1995), 447–455; *RIMS Kokyuroku* **919** (1995), 68–78.

[SKAO] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake : *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 33.

[W] M. Wakimoto : *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), 605–609.

[Y] 山田泰彦 : 数理物理シリーズ１『共形場理論入門』，培風館，2006.

モンスター単純群と頂点作用素代数

山田裕理

1　ムーンシャイン予想

モンスターの歴史は1973年に始まる．Fischerは$\{3,4\}$互換の群の研究から，ベビーモンスターと呼ばれる単純群を発見した．その後FischerとGriessは，位数2の元の中心化群がベビーモンスターの位数2の中心拡大となるような単純群が存在する可能性があることに気づいた．この新しい単純群が**モンスター M**に他ならない．モンスターには，位数2の元の共役類が$2A$, $2B$の二つある．上記の位数2の元は，共役類$2A$に属する．一方$2B$に属する位数2の元の中心化群は，コンウェイ(Conway)群Co_1の位数2^{25}のextraspecial群による拡大になる．モンスターは，位数2の元の中心化群がこの形になる唯一の単純群である．

モンスター研究の初期の段階から，忠実な既約表現の次数は196883以上であることが分かっていたが，この次数の既約表現の存在を仮定した上で，Fischer-Livingstone-Thorneはモンスターの指標表を完成させた．その指標表をもとにして，Nortonは196883次元の表現空間が対称不変双線形形式を持つ非結合的な可換代数になること，またモンスターはその代数の自己同型群になることを証明した．Griess [13] は，この代数に単位表現を付け加えた196884次元の代数を考察し，その自己同型群としてモンスターの存在を確立した．後に，より簡明なモンスターの構成法が，Conway [3] により得られた．

$\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}\tau > 0$ に対して，$q = e^{2\pi i\tau}$ とし，

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad \Theta_L(\tau) = \sum_{\alpha\in L} q^{\langle\alpha,\alpha\rangle/2}$$

とする．$\Theta_L(\tau)$ は，E_8 型ルート格子 3 個の直交和 L のテータ関数を表す．保型関数 $j(\tau) = \Theta_L(\tau)/\Delta(\tau)$ から定数項 744 を除いたものを，$J(\tau)$ で表す．$J(\tau)$ は，

$$J(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n)q^n = q^{-1} + 0 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

と展開される．q の係数 $c(1)$ は，$196884 = 1 + 196883$ のように，モンスターの二つの既約表現の次数の和であるが，実は $c(2), c(3), \ldots$ についても同様に，モンスターの既約表現の次数の和として簡単な式で表すことができる．McKay と Thompson はこれを一般化して，各 n についてモンスターの加群 $V(n)$ が存在すると仮定して，モンスターの任意の元 g に対し，g の $V(n)$ における指標 $\operatorname{tr}(g|_{V(n)})$ の母関数

$$T_g(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} \operatorname{tr}(g|_{V(n)})q^n$$

を考察した．$T_g(\tau)$ をトンプソン (Thompson) 級数と呼ぶ．Conway-Norton [5] は，さらに $T_g(\tau)$ の性質を詳しく調べて，次の**ムーンシャイン予想**を提出した：モンスターの加群 $V(n), n \geqq -1$ が存在して，モンスターの任意の元 g について，$T_g(\tau)$ は $PSL(2,\mathbb{R})$ のある離散部分群の種数 0 の関数体の生成元になる．

モンスターの共役類は 194 個あるが，$T_g(\tau)$ は相異なるものが 171 個である．g が単位元のときの $T_g(\tau)$ は，$J(\tau)$ に一致する．

モンスターの加群 $V(n)$ は，Frenkel-Lepowsky-Meurman [12] により構成された．[12] では，Borcherds [1] による頂点代数の先駆的な研究をもとに，頂点作用素代数の理論を構築し，さらにモンスターが自己同型群として作用

する頂点作用素代数 $V^\natural$ を構成した([2, 11] も参照のこと). $V^\natural$ は, ベクトル空間としては $V^\natural = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^\natural$ のように非負整数により次数づけられていて, 各 $V_n^\natural$ はモンスターの加群になる.

Borcherds [2] は, $V(n) = V_{n+1}^\natural$ に対してムーンシャイン予想を証明した. その方法は, $\mathbb{Z}^2$ により次数づけられた一般 Kac-Moody 超代数でモンスターが作用するものを構成し, その分母公式を用いるという独創的なものであった. Conway-Norton によるトンプソン級数の再生性も, この証明において重要な働きをする.

モンスターの研究の歴史について, 詳しいことは [12] の序文および [14, 25] を参照してください.

2 頂点作用素代数

頂点作用素代数とは, $\mathbb{C}$ 上の無限次元ベクトル空間 V であって, 任意のベクトル v と整数 n に対して v_n で表される V の線形変換が定められていて, ある公理系を満たすものである. 実際に議論する際には, ひとつひとつの線形変換 v_n を考えるより, むしろその母関数

$$Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \qquad v_n \in \operatorname{End} V$$

を扱うことが多い. $Y(v,z)$ を, v に付随する**頂点作用素**と呼ぶ. 変数 z は, 複素変数の場合と形式的変数の場合の 2 通りがある. ここでは, z を形式的な変数として代数的に扱う. 頂点作用素代数に関する基本的な文献として, [10, 12, 15, 18, 19, 26] などがある.

2.1　形式的変数

z, z_0, z_1, z_2 などは独立な形式的変数で，互いに可換とする．U を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，$U[[z,z^{-1}]]=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n\,|\,a_n\in U\}$ とおく．これは，ベクトル空間である．実際，和と定数倍は，各項の z^n の係数の和あるいは定数倍をとればよい．後で説明するように，一定の条件のもとで $U[[z,z^{-1}]]$ の元の積も考える．$a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$ について，z^{-1} の係数を $\mathrm{Res}_z\,a(z)$ で表す．また，微分は $\frac{d}{dz}a(z)=a'(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}na_nz^{n-1}$ である．

$U[[z,z^{-1}]]$ の元を扱う際に，デルタ関数 $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ は大切である．なお，デルタ関数の定義がこれとは異なる流儀もある (たとえば [15])．z を複素変数と考えて，$1>|z|$ および $1<|z|$ の領域で $(1-z)^{-1}$ をそれぞれ展開すると，

$$(1-z)^{-1}=\sum_{n\geqq 0}z^n,\qquad (1-z)^{-1}=-z^{-1}(1-z^{-1})^{-1}=-\sum_{n<0}z^n$$

となるが，$\delta(z)$ はこの二つの展開の差の形をしている．$\delta(z)$ の定義より，任意の整数 m について $z^m\delta(z)=\delta(z)$ となる．また，$\delta(z_1/z_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z_1^nz_2^{-n}$ について，$\delta(z_1/z_2)=\delta(z_2/z_1)$，$z_1\delta(z_1/z_2)=z_2\delta(z_1/z_2)$ などが成り立つ．

二つの形式的変数 z と w に対して，$(z-w)^n$ は

$$(z-w)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}z^{n-i}(-w)^i$$

のように，2番目の変数の非負ベキに展開するものと約束する．この約束に従えば，$\delta(z)=(1-z)^{-1}-(-z+1)^{-1}$ と書くことができる．また，

$$z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=(z_1-z_2)^{-1}-(-z_2+z_1)^{-1}\tag{2.1}$$

も成り立つ．

$\delta(z)$ の n 次微分 $\delta^{(n)}(z)=\left(\frac{d}{dz}\right)^n\delta(z)$ は，次のような性質がある ([18])．

(1)　$\frac{1}{n!}\delta^{(n)}(z)=(1-z)^{-n-1}-(-z+1)^{-n-1}$.

(2) $m > n \geqq 0$ ならば $(z_1 - z_2)^m \delta^{(n)}(z_1/z_2) = 0$.

(3) $a^i(z_2) \in U[[z_2, z_2^{-1}]]$, $0 \leqq i \leqq r$ について,

$$z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)a^0(z_2) + \cdots + z_1^{-r-1}\delta^{(r)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)a^r(z_2) = 0$$

となるのは $a^i(z_2) = 0$, $0 \leqq i \leqq r$ の場合に限る.

(2.1) より,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= (z_1 - z_2)^{-n-1} - (-z_2 + z_1)^{-n-1} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^n z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ. また, テイラー (Taylor) の公式を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z_0)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_0^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^n z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2 + z_0}{z_1}\right)$$

となる. $z_2^{-1}\delta(z_1/z_2) = z_1^{-1}\delta(z_2/z_1)$ なので, (2.2) と合わせて

$$z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) = z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2 + z_0}{z_1}\right) \tag{2.3}$$

が得られる. $n \geqq 0$ ならば $(z_1 - z_2)^n = (-z_2 + z_1)^n$ なので,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n\left((z_1 - z_2)^{-n-1} - (-z_2 + z_1)^{-n-1}\right) \\ &\qquad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_0^n\left((z_1 - z_2)^{-n-1} - (-z_2 + z_1)^{-n-1}\right) \\ &\qquad = z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right)\end{aligned}$$

となり, 次の式も得られる.

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right). \tag{2.4}$$

$U = \mathrm{End}\, V$ の場合の $a^i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^i_n z^n$ ($a^i_n \in \mathrm{End}\, V$) について考える．任意に固定した $v \in V$ に対し，各 n について

$$a^1_{n_1} \cdots a^r_{n_r} v; \quad n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}, \quad n_1 + \cdots + n_r = n$$

が有限個を除いて 0 ならば，積 $a^1(z) \cdots a^r(z) \in (\mathrm{End}\, V)[[z, z^{-1}]]$ が

$$a^1(z) \cdots a^r(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{n_1+\cdots+n_r=n} a^1_{n_1} \cdots a^r_{n_r} \Big) z^n$$

として定義できる．このように，各項の z^n の係数が有限和となるような計算はしてよいが，無限和になるような計算をしてはいけない．代数的に扱うので，級数が収束するかどうかは考えなくてよいが，各項の z^n の係数が何らかの意味で有限和として確定していることを，計算の各段階で常に確認する必要がある．

2.2　頂点代数と頂点作用素代数

頂点代数の概念は Borcherds [1] により導入されたが，ここでは Lepowsky-Li [18] の定義を採用する．[18, Section 3.6] において，Borcherds による定義と同値であることが示されている．

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に真空ベクトルと呼ばれる特別なベクトル $\mathbf{1}$ が存在し，また線形写像

$$Y(\,\cdot\,, z) : V \to (\mathrm{End}\, V)[[z, z^{-1}]]; \quad Y(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

が定義されていて次の条件を満たすとき，$(V, Y, \mathbf{1})$ を**頂点代数**という．

1. **(打切り条件)** $n \gg 0$ ならば $u_n v = 0$.
2. **(真空条件)** $Y(\mathbf{1}, z) = 1$; V の恒等変換.
3. **(生成条件)** $n \geqq 0$ ならば $v_n \mathbf{1} = 0$ で，$v_{-1}\mathbf{1} = v$.

4. **(ヤコビ等式)**

$$z_0^{-1}\delta\Big(\frac{z_1-z_2}{z_0}\Big)Y(u,z_1)Y(v,z_2)-z_0^{-1}\delta\Big(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\Big)Y(v,z_2)Y(u,z_1)$$
$$=z_2^{-1}\delta\Big(\frac{z_1-z_0}{z_2}\Big)Y(Y(u,z_0)v,z_2).$$

ヤコビ (Jacobi) 等式において，z_0, z_1, z_2 は独立な形式的変数であるが，この等式の両辺の $z_0^{-k-1}z_1^{-m-1}z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると，

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{k}{i}u_{m+k-i}v_{n+i}-(-1)^k\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{k}{i}v_{n+k-i}u_{m+i}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(u_{k+i}v)_{m+n-i}$$

が得られる．これを Borcherds 等式と呼ぶ．実際，この等式を最初に得たのは Borcherds [1, 2] である．この等式の両辺は $\mathrm{End}\,V$ の元の無限和であるが，$w\in V$ を任意にひとつ固定すると，打切り条件により w への作用としては有限和になる．ヤコビ等式が成立することと，すべての $k,m,n\in\mathbb{Z}$ について Borcherds 等式が成立することは同値である．

頂点代数 $(V,Y,\mathbf{1})$ がヴィラソロ (Virasoro) 元と呼ばれる特別なベクトル ω を持ち，次の条件を満たすとき，$(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ を**頂点作用素代数**という．

1. **($\mathbb{Z}$-次数)** $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ かつ $\dim V_n<\infty$ で，さらに $n\ll 0$ ならば $V_n=0$.
2. **(ヴィラソロ元)** $Y(\omega,z)$ の z^{-n-2} の係数を $L(n)=\omega_{n+1}$ とおくと，

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}c$$

が成り立つ．c は定数で，ω の中心電荷または V の階数と呼ばれる．

3. **($L(0)$-固有空間)** $v\in V_n$ ならば $L(0)v=nv$.
4. **($L(-1)$-微分)** $Y(L(-1)v,z)=\frac{d}{dz}Y(v,z)$.

頂点作用素代数 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を，簡単に V あるいは (V, Y) と書くこともある．$v \in V_n$ のとき v をウエイト n の元であるといい，$\mathrm{wt}\, v = n$ と書く．$\mathrm{wt}\,\mathbf{1} = 0$，$\mathrm{wt}\,\omega = 2$ に注意する．零ベクトル 0 のウエイトは任意とする．$\mathrm{wt}\, u_i v = \mathrm{wt}\, v + \mathrm{wt}\, u - i - 1$，すなわち作用素としての u_i のウエイトは $\mathrm{wt}\, u - i - 1$ である．

ヤコビ等式は，いくつかの大切な公式を含んでいる．ヤコビ等式の両辺の z_0^{-1} の係数を比較して，

$$[Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = \mathrm{Res}_{z_0}\, z_2^{-1} \delta\Big(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\Big) Y(Y(u, z_0)v, z_2) \tag{2.5}$$

が得られる．さらに，この式の両辺の $z_1^{-m-1} z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると，

$$[u_m, v_n] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (u_i v)_{m+n-i} \tag{2.6}$$

となる．この式の右辺は，打切り条件により有限和になることに注意する．

同様に，ヤコビ等式の両辺の z_1^{-1} の係数を比較すると，(2.3) により

$$\begin{aligned} Y(Y(u, z_0)v, z_2) = \mathrm{Res}_{z_1} \Big(& z_0^{-1} \delta\Big(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\Big) Y(u, z_1) Y(v, z_2) \\ & - z_0^{-1} \delta\Big(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\Big) Y(v, z_2) Y(u, z_1) \Big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

を得る．この式の両辺の $z_0^{-m-1} z_2^{-n-1}$ の係数を比較すると，

$$(u_m v)_n = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} \big(u_{m-i} v_{n+i} - (-1)^m v_{m+n-i} u_i \big) \tag{2.8}$$

となる．

次の公式も重要である．

$$[L(-1), Y(v, z)] = \frac{d}{dz} Y(v, z). \tag{2.9}$$

さらに，次のことが成り立つ．

(歪対称性) $u, v \in V$ に対し

$$Y(u,z)v = e^{zL(-1)}Y(v,-z)u.$$

(可換性) $u, v \in V$ に対し，非負整数 k が存在して

$$(z_1 - z_2)^k [Y(u,z_1), Y(v,z_2)] = 0.$$

(結合性) $u, w \in V$ に対し非負整数 l が存在して，任意の $v \in V$ について

$$(z_0 + z_2)^l Y(Y(u,z_0)v, z_2)w = (z_0 + z_2)^l Y(u, z_0 + z_2)Y(v, z_2)w.$$

これらの性質は，ヤコビ等式と密接に関連している．実際，頂点作用素代数の定義において，ヤコビ等式は (a) 可換性と結合性，(b) 可換性と(2.9)，(c) 結合性と歪対称性，のいずれとも置き換えることができる．

作用素積展開 (operator product expansion) の表記法を用いると，

$$Y(u,z_1)Y(v,z_2) \sim \sum_{n=0}^{N} Y(u_n v, z_2)(z_1 - z_2)^{-n-1}$$

となる．N は，$n > N$ ならば $u_n v = 0$，を満たす非負整数である．たとえば，$T(z) = Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L(n) z^{-n-2}$ について，作用素積展開は

$$T(z_1)T(z_2) \sim \frac{T'(z_2)}{z_1 - z_2} + \frac{2T(z_2)}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{c/2}{(z_1 - z_2)^4}$$

となる．ここで，$T'(z_2)$ は $T(z_2)$ の微分を表す．

頂点作用素代数 V の自己同型とは，線形同型 $g : V \to V$ で，$gY(v,z)g^{-1} = Y(gv, z)$ と $g\omega = \omega$ の 2 条件を満たすものをいう．このとき，$g\mathbf{1} = \mathbf{1}$ および $g(V_n) = V_n$ も成り立つ．V の自己同型全体 $\mathrm{Aut}\, V$ は群になる．$v \in V_1$ に対して，$\exp(2\pi i v_0)$ は V の自己同型になる．これを，指数型の自己同型という．$\mathrm{Aut}\, V$ の部分群 H に対して，H により固定される V の元全部の集合 $V^H = \{v \in V \mid gv = v,\ g \in H\}$ は，V の部分代数になる．これを H による

オービフォールドという．H と V^H については，量子ガロア理論と呼ばれる関係が知られている．しかし，V^H の構造を調べること，あるいは V^H の既約加群を調べることなどは，一般に難しい．

2.3　グライス代数

頂点作用素代数は，その内部にさまざまな代数構造を含んでいる．頂点作用素代数 V の双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ が不変であるとは，任意の u,v,w に対して

$$(Y(u,z)v,w) = (v, Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}u, z^{-1})w)$$

が成り立つことをいう．このとき $(L(n)u,v) = (u, L(-n)v)$ で，特に $m \neq n$ ならば $(V_m, V_n) = 0$ となる．V の任意の不変双線形形式は，対称形式であることが知られている．$(\cdot,\cdot)$ が不変であれば，

$$\begin{aligned}(u,v) &= \mathrm{Res}_z\, z^{-1}(Y(u,z)\mathbf{1}, v)\\ &= \mathrm{Res}_z\, z^{-1}(\mathbf{1}, Y(e^{zL(1)}(-z^{-2})^{L(0)}u, z^{-1})v)\end{aligned}$$

となるので，(u,v) は $(\mathbf{1},w)$, $w \in V_0$ により定まる．$L(-1)\mathbf{1} = 0$ に注意すると，V の不変双線形形式全体のなす空間は，$V_0/L(1)V_1$ の双対空間に同型であることが分かる．

頂点作用素代数 V が，$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ かつ $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ という条件を満たすと仮定する．このとき，ウエイト 1 の空間 V_1 は，次のようにリー環の構造を持つ．$u,v \in V_1$ について，$\mathrm{wt}\, u_i v = 1 - i$ なので，$i \geqq 2$ ならば $u_i v = 0$，さらに $u_1 v \in \mathbb{C}\mathbf{1}$，$u_0 v \in V_1$ となる．$u_0 v$ を $[u,v]$，$u_1 v$ の $\mathbf{1}$ の係数を $\langle u,v\rangle$ と書くことにする．(2.6)，歪対称性，および $L(-1)\mathbf{1} = 0$ を用いると，V_1 が $[\cdot,\cdot]$ に関してリー環になること，また $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が不変対称形式，すなわち $\langle [u,v], w\rangle = \langle u, [v,w]\rangle$ となることが確かめられる．さらに，(2.6) により，$u_n \leftrightarrow u \otimes t^n$ はアフィンリー環のレベル 1 の表現を与える．L を A 型，

D 型，あるいは E 型の複素単純リー環のルート格子とし，L に付随する格子頂点作用素代数 V_L（2.4 節を参照）を考える．V_L は上記の仮定を満たし，そのウエイト 1 の空間は，A 型，D 型，あるいは E 型の複素単純リー環になる．$u_n \leftrightarrow u \otimes t^n$ により，そのアフィンリー環のレベル 1 の表現も得られる．

次に，$u, v \in V_2$ について考える．この場合は $\mathrm{wt}\, u_i v = 3 - i$ なので，$i \geqq 4$ ならば $u_i v = 0$，また $u_3 v \in \mathbb{C}\mathbf{1}$，$u_2 v \in V_1$，$u_1 v \in V_2$ となる．$u_1 v$ を $u \cdot v$，$u_3 v$ の $\mathbf{1}$ の係数を $\langle u, v \rangle$ と書くことにする．ここで，さらに $V_1 = 0$ と仮定すると，$u \cdot v = v \cdot u$ および $\langle u \cdot v, w \rangle = \langle u, v \cdot w \rangle$ が成り立つ．$u \cdot v$ を V_2 における積として，V_2 は可換代数になる．しかし，一般には結合律は成り立たない．$\langle \cdot , \cdot \rangle$ は，V_2 の不変対称双線形形式である．実際，これは V の不変双線形形式 $(\cdot , \cdot)$ を V_2 に制限したものと，定数倍の違いを除いて一致する．V_2 に，この積と $\langle \cdot , \cdot \rangle$ を合わせて考えたものを，頂点作用素代数 V の**グライス (Griess) 代数**と呼ぶ．ヴィラソロ元 ω はウエイト 2 であり，任意の $u \in V_2$ に対して $\omega \cdot u = L(0)u = 2u$ なので，$\frac{1}{2}\omega$ はグライス代数の単位元となる．なお，$g \in \mathrm{Aut}\, V$ ならば $g(V_2) = V_2$ であり，$(gu) \cdot (gv) = g(u \cdot v)$ および $\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle$ も成り立つので，g を V_2 に制限したものはグライス代数の自己同型になる．

2.4　格子に付随する頂点作用素代数

L を任意の有限階数の正定値偶格子とし，$\langle \cdot , \cdot \rangle$ をその内積とする．すなわち，L は有限生成の自由 $\mathbb{Z}$-加群で，$\langle \cdot , \cdot \rangle$ は対称 $\mathbb{Z}$-双線形形式であって，$0 \neq \alpha \in L$ ならば $0 < \langle \alpha, \alpha \rangle \in 2\mathbb{Z}$ である．[1, 12] において，格子 L に対して頂点作用素代数 V_L が構成された．これを L に付随する**格子頂点作用素代数**という．[12, 18] にその構成法の詳しい説明がある．

V_L はベクトル空間として，ハイゼンベルグ (Heisenberg) 代数の対称代数 $M(1)$ とツイスト群環 $\mathbb{C}\{L\}$ のテンソル積 $V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}\{L\}$ である．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ を L の生成系とすると，$M(1)$ はベクトル空間としては，$\alpha_i(-n_i)$; $0 < n_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, d$ を変数とする多項式環と同型である．また $\mathbb{C}\{L\}$ は，ベクトル空間としては L の通常の群環 $\mathbb{C}[L]$ と同型である．$\mathbb{C}\{L\}$ の基底を，$\{e^\alpha \,|\, \alpha \in L\}$ と書くことにする．この記法は正式なものではなく，やや厳密性を欠くが，ここでは通常の群環と異なり，一般には $e^\alpha e^\beta \neq e^{\alpha+\beta}$ で，$e^\alpha e^\beta$ と $e^\beta e^\alpha$ は一致しないことを注意するに止める．

$u \in M(1)$ と $v \in \mathbb{C}\{L\}$ について，$V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}\{L\}$ の元 $u \otimes v$ を，テンソルの記号を省略して簡単に uv とも書く．特に u あるいは v が単位元のとき，$1 \otimes v$，$u \otimes 1$ をそれぞれ v，u とも書く．$\alpha_i(-n_i)$ のウエイトは n_i で，e^α のウエイトは $\langle \alpha, \alpha \rangle / 2$ である．$\alpha_i(-n_i)e^\alpha$ のウエイトは，$n_i + \langle \alpha, \alpha \rangle / 2$ となる．ウエイト 0 の元 $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$ は，V_L の真空ベクトルになる．$\{h_1, \ldots, h_d\}$ を $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ の正規直交基底とすると，ヴィラソロ元は $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d h_i(-1)^2$ と表すことができる．V_L においてウエイトが負の空間は 0 で，ウエイトが 0 の空間は $\mathbb{C}\mathbf{1}$ である．V_L の階数は，格子 L の階数に等しい．

格子 L を -1 倍する等長変換 $L \to L; \alpha \mapsto -\alpha$ は，頂点作用素代数 V_L の位数 2 の自己同型を引き起こす．それを θ で表す．θ は $M(1)$ および $\mathbb{C}\{L\}$ に $\theta(\alpha(-n)) = -\alpha(-n)$，$\theta(e^\alpha) = e^{-\alpha}$ のように作用する．θ による V_L のオービフォールド V_L^θ を V_L^+ とも書く：$V_L^+ = \{v \in V_L \,|\, \theta v = v\}$．$V_L^+$ の構造およびその表現は，Abe, Dong, Li, Nagatomo らにより詳しく研究されている．

2.5　ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$

ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ は，Frenkel-Lepowsky-Meurman [12] により，リーチ (Leech) 格子 Λ に付随する格子頂点作用素代数 V_Λ をもとに，位数 2 の自己同型によるオービフォールド構成法を用いて構成された．階数 24 のユニモジュラー偶格子は全部で 24 個あるが，そのうちルート，すなわち $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ となる元 α を持たないのは，唯一つリーチ格子だけである．ち

なみに，リーチ格子以外の 23 個はニーマイアー (Niemeier) 格子と呼ばれ，それに含まれるルートにより記述される．リーチ格子は，その自己同型群であるコンウェイ群 Co_0 を通して，モンスターと密接に関係していることは以前から知られていたが，[12] によりその理由が解明された．

リーチ格子 Λ の等長変換 $\Lambda \to \Lambda;\ \alpha \mapsto -\alpha$ から引き起こされる V_Λ の位数 2 の自己同型 θ について，θ によるオービフォールド V_Λ^+ を考える．α_i, $1 \leqq i \leqq 24$ を Λ の生成系とする．さらに，$\Lambda_{2n} = \{\alpha \in \Lambda \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2n\}$ とおく．Λ にはルートがないので，Λ_2 は空集合となる．また，$|\Lambda_4| = 196560$ であることが知られている．V_Λ のウエイト 2 の空間は，$\alpha_i(-2), 1 \leqq i \leqq 24$, $\alpha_i(-1)\alpha_j(-1), 1 \leqq i \leqq j \leqq 24, e^\alpha, \alpha \in \Lambda_4$ を基底とする $24+300+196560 = 196884$ 次元の空間である．一方，V_Λ^+ のウエイト 2 の空間は，$\alpha_i(-1)\alpha_j(-1)$, $1 \leqq i \leqq j \leqq 24, e^\alpha + e^{-\alpha}, \alpha \in \Lambda_4$ を基底とする $300 + 196560/2 = 98580$ 次元の空間である．

一般に，頂点作用素代数 V の有限位数の自己同型 g に対して，既約 g-ツイスト加群 ([7]) が定義されるが，V_Λ とその位数 2 の自己同型 θ については，既約 θ-ツイスト加群が唯一つ存在する．それを V_Λ^T で表す．θ は V_Λ^T にも作用する．θ により固定される V_Λ^T の元全部の集合 $(V_\Lambda^T)^+$ は，既約 V_Λ^+-加群になる．V_Λ^+ と $(V_\Lambda^T)^+$ の直和ベクトル空間を $V^\natural$ とおく：$V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus (V_\Lambda^T)^+$. $V^\natural$ には，V_Λ^+ を部分代数とする頂点作用素代数の構造が一意的に定まる．これが Frenkel-Lepowsky-Meurman により構成されたムーンシャイン頂点作用素代数である．

$V^\natural$ のウエイトが負の空間は 0，ウエイト 0 の空間は $\mathbb{C}\mathbf{1}$，ウエイト 1 の空間は 0 である．$V^\natural$ のウエイト 2 の空間を $\mathcal{B}$ で表すことにする．$\mathcal{B}$ はグライス代数の構造を持つが，これを**モンスター グライス代数**と呼ぶ．$(V_\Lambda^T)^+$ のウエイト 2 の空間は $24 \cdot 2^{12} = 98304$ 次元なので，$\mathcal{B}$ の次元は $98580 + 98304 = 196884$ となる．

$V^\natural$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,V^\natural$ がモンスター $\mathbf{M}$ になることは，(1) $\mathbf{M}$ が $\mathrm{Aut}\,V^\natural$ に含まれること，(2) $V^\natural$ が頂点作用素代数として $\mathcal{B}$ で生成されること，(3) $\mathrm{Aut}\,\mathcal{B} = \mathbf{M}$ という Tits の結果，を合わせて証明される．

ATLAS [4] の記号を用いて，モンスターの単位指標を χ_1，単位指標の次に次数の小さい既約指標を χ_2 で表す．χ_2 の次数は 196883 であり，モンスターの $\mathcal{B}$ への表現の指標は，$\chi_1 + \chi_2$ となる．ヴィラソロ元 ω は自己同型で固定されるので，$\mathbb{C}\omega$ が単位指標 χ_1 に対応する表現空間である．モンスターの位数 2 の元の共役類 $2A$ と $2B$ における χ_2 の値は，それぞれ 4371 および 275 である．$V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus (V_\Lambda^T)^+$ において，V_Λ^+ 上に 1，$(V_\Lambda^T)^+$ 上に -1 として作用する線形変換 ϕ は，頂点作用素代数 $V^\natural$ の位数 2 の自己同型になる．ϕ の $\mathcal{B}$ への作用の指標の値は $98580 - 98304 = 1 + 275$ なので，ϕ が共役類 $2B$ に属することが分かる．ϕ により固定される $V^\natural$ の元全部の集合は，V_Λ^+ に他ならない．このことから，[12] による $V^\natural$ の構成は，$2B$ オービフォールド構成とも呼ばれる．

$V^\natural$ は，きわめて特徴的な頂点作用素代数である．実際，$V^\natural$ は次の 3 条件を満たす唯一つの頂点作用素代数であろう，という一意性予想と呼ばれる予想がある ([12, Introduction]):

(a) 既約加群は唯一つ，自分自身のみである．

(b) 階数は 24 である．

(c) ウエイト 1 の空間は 0 である．

この予想に関しては，今までにいくつかの部分的な結果が得られているが，現在でも依然として大きな研究課題である．

3　共 形 元

この節では，ウエイトが非負の頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ で，$V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ かつ $V_1 = 0$ であるものを考える．

3.1　ヴィラソロ フレーム

ウエイト 2 の元 e の頂点作用素 $Y(e,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n z^{-n-1}$ の z^{-n-2} の係数たちが，中心電荷 c のヴィラソロ代数の関係式を満たすとき，すなわち $\tilde{L}(n) = e_{n+1}$ とおくと，$\mathrm{End}\, V$ の中で

$$[\tilde{L}(m), \tilde{L}(n)] = (m-n)\tilde{L}(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}c$$

が成立するとき，e を中心電荷 c の**共形元**と呼ぶ ([21])．c を $c = c(e)$ とも表す．$\mathrm{span}\{\tilde{L}(n); n \in \mathbb{Z}\} \oplus \mathbb{C}$ は，中心電荷 c のヴィラソロ代数であるが，真空ベクトル $\mathbf{1}$ から生成されるこのヴィラソロ代数の加群を $\mathrm{Vir}(e)$ とおくと，$\mathrm{Vir}(e)$ は頂点作用素代数 V の部分代数になる．実際，$\mathrm{Vir}(e)$ は e で生成される V の部分代数である．V が，格子頂点作用素代数あるいはムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ のように，正定値不変エルミート形式を持つ場合，$\mathrm{Vir}(e)$ はヴィラソロ代数の既約加群 $L(c,0)$ に一致し，V は $\mathrm{Vir}(e)$ のユニタリ表現になる．頂点作用素代数のヴィラソロ元は，中心電荷が頂点作用素代数の階数であるような共形元である．

$e \in V_2$ が共形元であるための必要十分条件は，$e/2$ がグライス代数のベキ等元，すなわち $(e/2)_1(e/2) = e/2$ となることである．このとき，e の中心電荷は $2\langle e, e\rangle$ で与えられる．ヴィラソロ元 ω について，$\omega/2$ はグライス代数の単位元であり，e が共形元ならば $f = \omega - e$ も共形元で，$e_1 f = 0$ となる．

二つの共形元 e^1 と e^2 が，$(e^1)_1 e^2 = 0$ および $\langle e^1, e^2\rangle = 0$ の 2 条件を満たすとき，互いに直交するという．このとき，任意の n について $(e^1)_n e^2 = 0$ が成り立つ．e^1, e^2 が互いに直交する共形元であれば，$e^1 + e^2$ も共形元で，

その中心電荷は $c(e^1)+c(e^2)$ である．また，e^1 と e^2 で生成される V の部分代数は，$\mathrm{Vir}(e^1)$ と $\mathrm{Vir}(e^2)$ の頂点作用素代数のテンソル積 $\mathrm{Vir}(e^1)\otimes\mathrm{Vir}(e^2)$ になる．ヴィラソロ元 ω が $\omega = e^1+e^2+\cdots+e^k$ と，互いに直交するいくつかの共形元の和に分解するとき，$\{e^1,\ldots,e^k\}$ あるいは $e^1,\ldots,e^k$ で生成される部分代数 $\mathrm{Vir}(e^1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Vir}(e^k)$ を，**ヴィラソロ フレーム**と呼ぶ([6])．ヴィラソロ フレームは多数知られているが，ここでは次の二つの例をあげる．

(i) $V^\natural$ の中心電荷 1/2 の共形元

Dong-Mason-Zhu [9] により，$V^\natural$ の中に 48 個の互いに直交する中心電荷 1/2 の共形元からなるヴィラソロ フレームが存在することが示された．このフレームを用いて，$V^\natural$ のさまざまな研究がなされている．たとえば，Dong による $V^\natural$ が有理的で既約加群は唯一つであることの証明に，このフレームが使われている．また，宮本雅彦による $V^\natural$ の構成の基礎にもなっている．

(ii) $V_{\sqrt{2}R}$, $R\cong A_l, D_l, E_l$ の共形元

R を A_l 型，D_l 型，または E_l 型のルート格子とし，それを $\sqrt{2}$ 倍した格子 $L=\sqrt{2}R$ に付随する格子頂点作用素代数 V_L を考える．Dong-Li-Mason-Norton [8] は，V_L の中に統一的な方法でヴィラソロ フレームを構成した．すべての $\alpha,\beta\in L$ について $\langle\alpha,\beta\rangle$ は偶数なので，ツイスト群環 $\mathbb{C}\{L\}$ は通常の群環 $\mathbb{C}[L]$ と同型で，$V_L = M(1)\otimes\mathbb{C}[L]$ となる．$\mathbb{C}[L]$ の標準基底は $e^{\sqrt{2}\alpha}$, $\alpha\in R$ で，積は $e^{\sqrt{2}\alpha}e^{\sqrt{2}\beta}=e^{\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\beta}$ である．R のルート系を $\Phi(R)$ とおく：$\Phi(R)=\{\alpha\in R\,|\,\langle\alpha,\alpha\rangle=2\}$．[8] のヴィラソロ フレームは，$l+1$ 個の互いに直交する共形元 ω^i, $1\leqq i\leqq l+1$ からなる．それぞれの共形元は，

$$w^{\pm}(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha(-1)^2\pm(e^{\sqrt{2}\alpha}+e^{-\sqrt{2}\alpha}),\quad \alpha\in\Phi(R)$$

の線形結合として表される．$w^{\pm}(\alpha)/4$ は，中心電荷 1/2 の共形元である．$w^{\pm}(\alpha)=w^{\pm}(-\alpha)$ なので，L を -1 倍する等長変換から引き起こされる V_L の位数 2 の自己同型 θ は，$w^{\pm}(\alpha)$ を動かさない．特に，$l+1$ 個の共形元はす

べて V_L^+ に含まれる．$0 \neq \alpha \in L$ ならば $\langle \alpha, \alpha \rangle \geqq 4$ なので，V_L^+ のウエイト 1 の空間は 0 であることに注意する．R が A_l 型の場合，ω^i の中心電荷は

$$c(\omega^i) = \begin{cases} 1 - 6/(i+2)(i+3) & ; 1 \leqq i \leqq l \\ 2l/(l+3) & ; i = l+1 \end{cases}$$

となる．$c(\omega^i)$, $1 \leqq i \leqq l$ は，ヴィラソロ代数の極小系列に属する既約表現の中心電荷に他ならない．$c(\omega^{l+1})$ は，パラフェルミオン代数の中心電荷である．R が E_8 型の場合は，最初と最後の共形元の中心電荷は 1/2 となる．

3.2　中心電荷 1/2 の共形元

e は中心電荷 1/2 の共形元で，$\mathrm{Vir}(e) \cong L(1/2, 0)$ とする．よく知られているように，$L(1/2, 0)$ の既約加群は $L(1/2, h)$, $h = 0, 1/2, 1/16$ の 3 個である．V を既約 $\mathrm{Vir}(e)$-加群の直和に分解し，その既約成分のうち $L(1/2, h)$ と同型なもの全部の和を $W(h)$ とおくと，$V = W(0) \oplus W(1/2) \oplus W(1/16)$ となる．V の線形自己同型 τ_e を $W(0) \oplus W(1/2)$ 上で 1，$W(1/16)$ 上で -1 と定めると，フュージョンルールにより，実は τ_e が頂点作用素代数 V の自己同型になることが分かる ([21])．この τ_e はよい性質を持つので，中心電荷 1/2 の共形元は特に大切である．

V がムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の場合，τ_e はモンスター $\mathbf{M} = \mathrm{Aut}\, V^\natural$ の共役類 $2A$ に属する．Conway [3] によるモンスターの $2A$ 元とモンスター グライス代数 $\mathcal{B}$ のベキ等元との対応の意味も，この τ_e により明らかになった．

$$\mathbf{M} \text{ の } 2A \text{ 元} \longrightarrow \mathcal{B} \text{ のベキ等元} \quad \text{(Conway)}$$
$$\mathbf{M} \text{ の } 2A \text{ 元} \longleftarrow \mathcal{B} \text{ のベキ等元} \quad \text{(Miyamoto)}$$

3.3 フレーム頂点作用素代数

基本的な頂点作用素代数 $L(1/2,0)$ およびその既約加群を，2元体 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の偶符号を用いて組み合わせることにより，新しい頂点作用素代数が構成できる．このような頂点作用素代数は，Miyamoto [22] により最初に考察された．この構成法により，性質のよい頂点作用素代数が得られる．Dong-Griess-Höhn [6] では，整理された形でこの頂点作用素代数が扱われている．

n を偶数とし，$L(1/2,0)$ の n 個のテンソル積を T とおく．T の任意の既約加群は，$L(1/2,0)$ の既約加群 $L(1/2,h_i)$, $h_i \in \{0,1/2,1/16\}$ の n 個のテンソル積に同型である．

$$M(h_1,\ldots,h_n) = L(1/2,h_1)\otimes\cdots\otimes L(1/2,h_n)$$

とおく．まず最初に，$h_1,\ldots,h_n \in \{0,1/2\}$ となるものだけを考える．$d_i = 2h_i$ とおけば，$d_i \in \{0,1\}$ であるが，これを $\mathbb{Z}_2$ の元とみる．$\delta = (d_1,\ldots,d_n) \in {\mathbb{Z}_2}^n$ に対して，$M^\delta = M(h_1,\ldots,h_n)$ とする．D を $\mathbb{Z}_2$ 上の長さ n の符号，すなわち ${\mathbb{Z}_2}^n$ の部分空間とし，$M_D = \bigoplus_{\delta\in D} M^\delta$ とおく．D が偶符号であれば，M_D には T を部分代数とする頂点作用素代数の構造が一意的に定まり，M_D は有理的な頂点作用素代数になる ([22])．これを，符号 D に付随する**符号頂点作用素代数**という．

次に，$h_1,\ldots,h_n$ の中に $1/16$ がある場合も含めて考える．$1/16$ が現れる位置を表示するために，$h_i = 0, 1/2$ のとき $a_i = 0$，$h_i = 1/16$ のとき $a_i = 1$ とおき，$M(h_1,\ldots,h_n)$ に対して $\tilde{\tau}(M(h_1,\ldots,h_n)) = (a_1,\ldots,a_n)$ と定義する．U が既約でない T-加群でも，U に含まれる既約 T-加群すべてについて $h_i = 1/16$ となる i が共通であれば，$\tilde{\tau}(U)$ を定義することができる．たとえば，U が既約 M_D-加群であれば，U はこの条件を満たす．T を含む階数 $n/2$ の単純頂点作用素代数 V について，次の3条件を満たす $\mathbb{Z}_2$ 上の長さ

n の符号 D と S が存在することが知られている.

(a) $V = \bigoplus_{\alpha \in S} V^{\alpha}$.

(b) V^{α} は既約 M_D-加群で, $\tilde{\tau}(V^{\alpha}) = \alpha$.

(c) $\alpha = (0^n)$ のとき, $V^{(0^n)}$ は M_D に一致する.

このような V を, (D, S)-**フレーム頂点作用素代数**と呼ぶ ([6]).

どのような条件を満たせば, (D, S)-フレーム頂点作用素代数が存在するであろうか. この基本的な問いに対する答えは, [24, Theorem 3.25] で与えられた. D と S はともに長さ $n = 8k$ の偶符号とし, 各 $\alpha \in S$ に対して $\tilde{\tau}(V^{\alpha}) = \alpha$, $V^{(0^n)} = M_D$ となる既約 M_D-加群 V^{α} が定まっていて, 次の 2 条件を満たすとする.

1. 任意の $\alpha, \beta \in S$ について, フュージョンルールは $V^{\alpha} \times V^{\beta} = V^{\alpha+\beta}$ である.
2. $\alpha \neq \beta \in S - \{(0^n)\}$ ならば, ベクトル空間の直和 $V^{\langle \alpha, \beta \rangle} = M_D \oplus V^{\alpha} \oplus V^{\beta} \oplus V^{\alpha+\beta}$ に $(D, \langle \alpha, \beta \rangle)$-フレーム頂点作用素代数の構造が定義できる. また, $S = \{(0^n), \alpha\}$ の場合は, $M_D \oplus V^{\alpha}$ は (D, S)-フレーム頂点作用素代数である.

このとき, ベクトル空間の直和 $\bigoplus_{\alpha \in S} V^{\alpha}$ には, (D, S)-フレーム頂点作用素代数の構造が一意的に定義できる.

$V^{\natural}$ は, フレーム頂点作用素代数として次のように構成される. E_8 型ルート格子に付随する格子頂点作用素代数 V_{E_8} は, (D_{E_8}, S_{E_8})-フレーム頂点作用素代数である. ここで, D_{E_8} は長さ 16 の第 2 Reed-Muller 符号 $RM(4, 2)$ で, S_{E_8} はその双対符号, すなわち第 1 Reed-Muller 符号 $RM(4, 1)$ である. 長さ 48 の符号 $S^{\natural}$ を

$$S^{\natural} = \{(\alpha, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, \alpha^c), (\alpha, \alpha^c, \alpha), (\alpha^c, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in S_{E_8}\}$$

と定義し, その双対符号を $D^{\natural}$ とおく. ここで, $\alpha^c = (1^{16}) - \alpha$ である. V_{E_8}

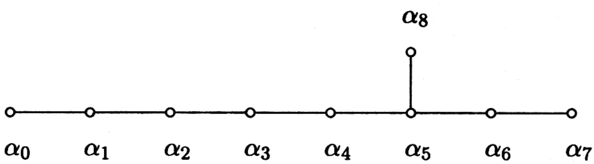
から出発して，三つのステップに分けて誘導と制限という操作を繰り返して，$V^\natural$ を $(D^\natural, S^\natural)$-フレーム頂点作用素代数として構成する．このようにして構成した $(D^\natural, S^\natural)$-フレーム頂点作用素代数が，実際に Frenkel-Lepowsky-Meurman [12] の $V^\natural$ と一致することを示すには，有限群論を含めた議論がさらに必要になる．詳細については，Miyamoto [23, 24] を参照してください．

4　2A 元と E_8 図形

モンスターの 2A 元，すなわち共役類 2A に属する元二つの積は，9 通りの共役類のいずれかに属する．この 9 通りの共役類が，アフィン E_8 図形の 9 個の頂点と対応することを最初に指摘したのは，McKay [20] である．最近の研究により，McKay の指摘に端を発するモンスターとアフィン E_8 図形の不思議な関係が，頂点作用素代数の立場から解明されつつある．

4.1　McKay 図形

アフィン E_8 図形



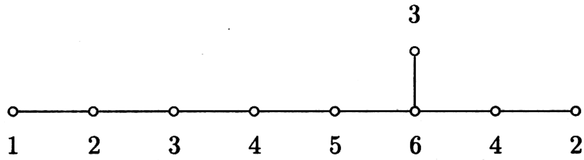
(4.1)

は，E_8 の単純ルート $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ および

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8 = 0 \tag{4.2}$$

で与えられるルート α_0 により構成される．これらのルートたちの内積は，$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$, $0 \leqq i \leqq 8$，また $i \neq j$ のときは，頂点 α_i と α_j が辺で結ばれている場合は $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1$，結ばれていない場合は $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ である．

(4.2) の左辺の α_i の係数 n_i を図形 (4.1) の α_i の位置に書くと，



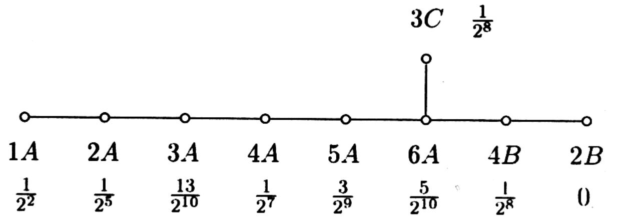
(4.3)

となる．

モンスターの任意の二つの 2A 元 x と y の積 xy は，位数が 6 以下である．より詳しく，積 xy は，1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2B, 3C の 9 個の共役類のいずれかに属する．それぞれの場合の xy の位数は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2, 3 であるが，これらの数字がちょうど図形 (4.3) に書かれている数字，すなわち n_i と一致することを，McKay は指摘した．ちなみに，モンスターの位数の小さい元は，次のような共役類に分かれる：位数が 1 の元は単位元だけの共役類 1A，位数が 2 の元は 2A, 2B の 2 個の共役類，位数が 3 の元は 3A, 3B, 3C の 3 個の共役類，位数が 4 の元は 4A, 4B, 4C, 4D の 4 個の共役類，位数が 5 の元は 5A, 5B の 2 個の共役類，位数が 6 の元は 6A, 6B, 6C, 6D, 6E, 6F の 6 個の共役類．

モンスターの 2A 元の中心化群はベビーモンスターの位数 2 の中心拡大，また 3A 元の中心化群は Fi'_{24}（Fischer 群 Fi_{24} の交換子群）の位数 3 の中心拡大であるが，McKay はこれらの群についても，アフィン E_7 図形およびアフィン E_6 図形と関係があることを指摘している．

ここまでは，単に二つの 2A 元の積 xy の位数と n_i が一致する，という観察であったが，Conway [3] により，モンスターとアフィン E_8 図形のより深い関係が明らかにされた．それによれば，積 xy の属する 9 個の共役類とアフィン E_8 図形の 9 個の頂点の対応は，次のようになる．これを **McKay 図形**という．



(4.4)

共役類の記号の下ないし右に書いてある有理数は，モンスターの $2A$ 元 x と y に対応する二つの中心電荷 1/2 の共形元 e_x と e_y の内積 $\langle e_x, e_y\rangle$ を表す．Conway は，$\langle e_x, e_y\rangle$ を計算し，積 xy の属する共役類により $\langle e_x, e_y\rangle$ の値が決まることを見出した．

4.2 E_8 の部分格子とコセット部分代数 U

A_l 型，D_l 型，および E_l 型ルート格子を，簡単のためそれぞれ A_l，D_l，E_l で表すことにする．E_8 型ルート格子は，アフィン E_8 図形 (4.1) に現れる α_i, $1 \leqq i \leqq 8$ で生成される．各 $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$ について，α_j, $0 \leqq j \leqq 8, j \neq i$ で生成される E_8 の部分格子を $N(i)$ とおく．$N(i)$ は階数 8 の格子で，それぞれ次の形をしている．

$$\begin{aligned}
&N(0) \cong E_8, && N(1) \cong A_1 \oplus E_7, && N(2) \cong A_2 \oplus E_6, \\
&N(3) \cong A_3 \oplus D_5, && N(4) \cong A_4 \oplus A_4, && N(5) \cong A_5 \oplus A_2 \oplus A_1, \\
&N(6) \cong A_7 \oplus A_1, && N(7) \cong D_8, && N(8) \cong A_8.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで，$\oplus$ は直交和を意味する．$N(i)$ の E_8 における指数は n_i に等しい．n_i が素数でない場合，$N(i)$ と E_8 の中間に次のような部分格子が存在する．

$$\begin{aligned}
&A_3 \oplus D_5 \subset D_8 \subset E_8, && A_7 \oplus A_1 \subset A_1 \oplus E_7 \subset E_8, \\
&A_5 \oplus A_2 \oplus A_1 \subset A_2 \oplus E_6 \subset E_8, && A_5 \oplus A_2 \oplus A_1 \subset A_1 \oplus E_7 \subset E_8.
\end{aligned}$$

一方，モンスターの共役類 mX に属する元 g の k 乗が共役類 nY に属することを，$(mX)^k = nY$ のように表すと，モンスターの元の共役類にはベキ乗による次の関係がある ([4]).

$$(4A)^2 = 2B, \quad (4B)^2 = 2A, \quad (6A)^2 = 3A, \quad (6A)^3 = 2A$$

この関係と，$N(i)$ と E_8 の中間にある部分格子との対応は示唆的である．

R を A_l, D_l, E_l のいずれかとする．3.1 節にあるように，R を $\sqrt{2}$ 倍した格子 $\sqrt{2}R$ に付随する格子頂点作用素代数 $V_{\sqrt{2}R}$ は，$l+1$ 個の互いに直交する共形元 ω^i, $1 \leqq i \leqq l+1$ を持つ．$s = s(R) = \omega^1 + \cdots + \omega^l$ および $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(R) = \omega^{l+1}$ とおく．s と $\tilde{\omega}$ は直交し，和 $s + \tilde{\omega}$ は $V_{\sqrt{2}R}$ のヴィラソロ元に一致する．$\tilde{\omega}$ の中心電荷は，$R = A_l$ のとき $2l/(l+3)$，$R = D_l$ のとき 1，$R = E_6, E_7, E_8$ のときそれぞれ 6/7, 7/10, 1/2 である．

(4.5) のように，$N(i)$ はいくつかの直既約な格子の直交和になる．その直既約成分を $R_1, \ldots, R_r$ とおく．r は $i = 0, 7, 8$ のとき 1，$i = 5$ のとき 3 で，その他のときは 2 である．$s^k = s(R_k)$, $\tilde{\omega}^k = \tilde{\omega}(R_k)$ とおき，$V_{\sqrt{2}E_8}$ のコセット部分代数

$$U = \{v \in V_{\sqrt{2}E_8} \mid s(R_k)_1 v = 0,\ 1 \leqq k \leqq r\} \tag{4.6}$$

を考える．U は頂点作用素代数で，そのヴィラソロ元は $\tilde{\omega}(R_1) + \cdots + \tilde{\omega}(R_r)$ である．

$N(i)$ による剰余群 $E_8/N(i)$ は位数 n_i の巡回群であるが，それを用いて $V_{\sqrt{2}E_8}$ の指数型の自己同型 σ を定義することができる．σ は位数 n_i で，部分代数 U は σ-不変である．$\hat{e} = \tilde{\omega}(E_8)$, $\hat{f} = \sigma\hat{e}$ とおく．これらは中心電荷 1/2 の共形元で，どちらも U に含まれる．実際，U は $\hat{e}$ と $\hat{f}$ で生成される頂点作用素代数である．

4.3 $V^\natural$ への埋込み

いままでは $V_{\sqrt{2}E_8}$ における議論であった．$\sqrt{2}E_8$ の三つの直交和 $(\sqrt{2}E_8)^3$ は，リーチ格子 Λ に埋め込むことができる．この埋込みは一意的ではないが，ある具体的な埋込みを考えることで，いままでの $U, \sigma, \hat{e}, \hat{f}$ を V_Λ において議論することが可能になる．一方，[12] による $V^\natural$ の構成では，$V_\Lambda^+ \subset V^\natural$ であるが，V_Λ 全体は $V^\natural$ には含まれない．実は，$\hat{e}$ は V_Λ^+ に含まれるが，$\hat{f}$ は一般には含まれない．最近 Lam-Miyamoto は，$V^\natural$ が U と同型な部分代数を含むことを証明した．この埋込みによる $U, \hat{e}, \hat{f}$ の $V^\natural$ における像をそれぞれ $\tilde{U}, \tilde{e}, \tilde{f}$ とすると，[16, 17] から次のことが得られる．

(1) $\tilde{U}$ のグライス代数 $\tilde{U}_2$ は，Conway の代数 [3, Table 3] と同型である．特に，$\langle \tilde{e}, \tilde{f} \rangle$ の値は McKay 図形のものと一致する．

(2) $\tilde{e}$ と $\tilde{f}$ から定義される $V^\natural$ の位数 2 の自己同型 $\tau_{\tilde{e}}$ と $\tau_{\tilde{f}}$ について，積 $\tau_{\tilde{e}}\tau_{\tilde{f}}$ は位数 n_i で，McKay 図形の示すモンスターの共役類に属する．

参考文献

[1] R.E. Borcherds : Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), 3068–3071.

[2] R.E. Borcherds : Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

[3] J.H. Conway : A simple construction for the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[4] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson : *ATLAS of Finite Groups*, Oxford Univ. Press, 1985.

[5] J.H. Conway and S.P. Norton : Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.

[6] C. Dong, R.L. Griess Jr. and G. Höhn : Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[7] C. Dong and J. Lepowsky : The algebraic structure of relative twisted vertex operators, *J. Pure and Applied Algebra* **110** (1996), 259–295.

[8] C. Dong, H.-S. Li, G. Mason and S.P. Norton : Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics, in: *Proc. of the Conference on the Monster and Lie algebra at the Ohio State University*, May 1996, ed. by J. Ferrar and K. Harada, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998, 27–42.

[9] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu : Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, in: *Algebraic Groups and Their Generalizations, Proc. Symp. Pure Math.* Vol.**56, II**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, 295–316.

[10] E. Frenkel and D. Ben-zvi : *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Amer. Math. Soc., Providence, 2001.

[11] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman : A natural representation of the Fischer-Griess monster with the modular function J as character, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81** (1984), 3256–3260.

[12] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman : *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, New York, 1988.

[13] R.L. Griess Jr. : The Friendly Giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[14] 原田耕一郎：『モンスター』，岩波書店，1999 年.

[15] V.G. Kac : *Vertex Algebras for Beginners* 2nd Ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1998.

[16] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi : Vertex operator algebras, extended E_8 diagram, and McKay's observation on the Monster simple group, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[17] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi : McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2, *IMRP* **2005:3** (2005), 117–181.

[18] J. Lepowsky and H.-S Li : *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[19] A. Matsuo and K. Nagatomo : *Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields*, MSJ Memoirs **4**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1999.

[20] J. McKay : Graphs, singularities, and finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. **37**, Amer. Math. Soc., Providence, 1980, 183–186.

[21] M. Miyamoto : Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523–548.

[22] M. Miyamoto : Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207–222.

[23] 宮本雅彦 :「符号と頂点作用素代数の構成」,『数学』**52**, 2000年4月, 159–171.

[24] M. Miyamoto : A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. Math.* **159** (2004), 535–596.

[25] 鈴木通夫 :『有限単純群』, 紀伊国屋書店, 1987年.

[26] 土屋昭博 :『共形場理論入門』, 日本数学会, 数学メモアール第4巻, 2004年.

第3話

最大位数の散在型単純群，モンスターの構造について

吉荒 聡

1　有限単純群とその構造・分類

1.1　有限単純群の分類定理とモンスター

群 G の正規部分群が単位部分群 1 か G 自身に限るとき，G を**単純群**と呼ぶ．任意の有限群は単純群の“積み重ね”として実現できる：有限群 G が単純群でなければ，1 や G と異なる正規部分群 G_1 があるので，剰余群 G/G_1 を考えると，G より本当に位数の小さい有限群 G/G_1 と G_1 が得られる．これらが単純群でなければ，同じ操作を繰り返す．G は有限なので，有限回でこの操作は終了し，G の部分群の列 $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_m = 1$ で，

すべての $1 \leq i \leq m$ に対し G_i は G_{i-1} の正規部分群で
G_{i-1}/G_i は単純群である

という性質を持つものが構成できる．一つの有限群 G に対して，このような列（組成列）はいろいろ存在するが，ここに登場する剰余群 G_{i-1}/G_i の同型類の列（**組成因子**）は，G に対して順番の違いを除けばただ一つに定まる．

有限群を物質に例えるならば，有限単純群とは，物質を構成する最小要素である分子に相当しよう．そこで，有限群の構造の理解には，単純群の理解——その分類と構造の解明——が欠かせない．

単純群を分類しようという試みは前世紀の60年代以降活発に行われ，1981年頃におおよその完成宣言が出され，2004年秋の準薄群分類証明発表 [2] に

より，次の大定理に対する証明が完成した．

定理 1　有限単純群は，次のいずれかの群と同型である．

(1) 素数位数の群

(2) 5 次以上の交代群 Alt_n $(n \geq 5)$

(3) リー (Lie) 型の単純群と総称される 16 種類の単純群
（9 種類のシュヴァレー群と 7 種類のその変形からなる）

(4) 散在型の単純群と総称される 26 個の単純群

散在型単純群のうち，最大の位数を持つものが**モンスター**である．最近の慣例に従い，以下この群を $\mathbf{M}$ と記す．その位数（集合としての元の総数）は

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 =$$
$$808,017,424,794,512,875,886,459,904,$$
$$961,710,575,005,754,368,000,000,000$$

であり，人類が知覚し得た最大の意味ある自然数と言われている．

1.2　分類定理の証明とその改良

「奇数位数の有限群は可解である（組成因子がすべて可換）」という Feit-Thompson の定理から，非可換単純群の位数は偶数であり，位数 2 の元（**インヴォルーション**）が存在する．「インヴォルーションの中心化群が与えられた群と同型になるような有限単純群は有限個しかない」という Brauer-Fowler の定理を動機として，インヴォルーションの中心化群から単純群を決定する手法が開発され，単純群におけるインヴォルーションの中心化群の構造と埋め込まれ方の解明も進んだ．これらの成果の上に，壮大な帰納法の結果として有限単純群の分類が完成したのである．

ここで一般的な用語を少し準備する．以下，断らない限り群とは有限群を意味する．素数 p に対して，p-群とは，位数が p のベキである群のことである．群 G の正規な p-部分群の中で最大のものが存在する．これを $O_p(G)$ と書く．群 G の **p-局所部分群**とは，単位群ではない p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ のことである．$O_p(H)$ の中心化群 $C_H(O_p(H))$ が $O_p(H)$ に含まれるとき，群 H は**標数 p 型**であるという．G の p-局所部分群 H がすべて標数 p 型であるとき，G は**局所的に標数 p 型**であるという．

すべてのインヴォルーションの中心化群が標数 2 型であるか，そうでないかによって，単純群決定の難しさが格段に異なる．後者の場合には，標準的に埋め込まれるインヴォルーションの中心化群が存在し，単純群は比較的たやすく決定される．現在の分類証明においては，前者の扱いが大変複雑である．準薄と呼ばれる場合を別に分類した上で，ある奇素数 p を位数に持つ元の中心化群が，再びある標準的な埋め込まれ方をしていることを，技巧を尽くした議論で示している．

今世紀初め頃から Stellmacher, Meierfrankenfeld, Stroth 等が中心となって，後者の単純群の分類をより一般的な観点から捉(とら)えて，奇素数に移行するプロセスを経ることなく完成させようという，**有限単純群分類の第 3 世代証明計画**が提唱されている．すなわち，局所的に標数 p 型の単純群の p-局所構造を解析するとともに，局所的に標数 2 型の単純群の分類を完成させようというもくろみである．詳細についてはまず [20] を参照されたい．

1.3　有限単純群の構造——極大部分群の分類

単純群は，自明でない剰余群が生み出せないという意味で最小の群であるから，その構造の解明には困難が伴う．手がかりは，その**極大部分群**（真部分群のうち，包含関係に関して極大なもの）を決定することである．これから，帰納的に部分群の様子が見てとれる．

有限群の単位群と異なる正規部分群のうち，包含関係に関して極小なもの（**極小正規部分群**）は，いくつかの同型な単純群の直積である．可換な単純群はある素数 p を位数とするから，可換な極小正規部分群は位数 p の群の直積（**基本可換 p-群**）になる．

有限単純群 G の極大部分群 M に対して，その極小正規部分群 N を考えると，N の G における正規化群 $N_G(N)$ は M を含むので，G の単純性と M の極大性から $N_G(N) = M$ を得る．つまり，有限単純群の極大部分群は，次のどちらかの構造を持っている．

(A) 基本可換 p-群 E の正規化群

(B) 互いに同型な非可換単純群の直積 N の正規化群

どちらの場合も完全な解析はやさしくない．(B) の場合には，N の因子である単純群は，G より位数が本当に小さいので，帰納的に決定されていると期待できる．しかし，それがあまりに小さい場合には，この小さな非可換単純群を大きな単純群 G の中に構成するのが非常に難しい．(B) の極大部分群で比較的大きなものは，決定できる．

(A) の場合 M は**極大 p-局所部分群**（つまり p-局所部分群のうちで包含関係に関して極大なもの）である．しかし，極大 p-局所部分群は極大部分群とは限らないことに注意しよう．(A) の形の極大部分群を求めるには，まず極大 p-局所部分群を決定した後，それらが (B) の形の極大部分群ないしは異なる素数 q に対する q-局所部分群に入るかどうかを調べて，極大部分群になるものを拾い出せばよい．極大 p-局所部分群の決定は，単純群分類の第3世代証明のひとつの目標でもあるから，一般にはなかなか面倒であるが，単純群が適当な組合せ構造にうまく作用している場合には，いろいろ工夫して計算できる．このような組合せ構造として，適当なアマルガムのコセット幾何が活躍することは，後で詳しく述べる．

現在では，モンスター以外のすべての散在型単純群に対して，その極大部分群がすべて決定している．交代群については古くに解決されており，リー型の単純群についても（有限単純群の分類を用いて）原理上決定されている．リー型および散在型の単純群に対する解説は，それぞれ [16] および [4] を参照されたい．

1.4　モンスターの極大部分群と本稿の目的

モンスターの極大部分群をすべて決定するという問題は未解決である．1.3 節の場合 (B) に属する小さな極大部分群の中で，存在が確定していないものがあり，それをすべて解決するのは，人間の知恵というより計算機の性能の問題のようにも思える．

一方，(A) の場合は最終的に 2002 年頃，計算機の援用なしに解決された．より一般に，極大な p-局所部分群がすべて決定されている．$p > 2$ のときには R.A. Wilson [27] がすでに分類しており，長らく残されていた $p = 2$ の場合を Shpectorov と Meierfrankenfeld [19, 18] が解決した．モンスターに対する階数 5 の幾何（単体複体）が発見され，その理解が進んだ点に，解決の鍵がある．

この幾何の構成と極大 2-局所部分群分類の大筋を示し，アマルガムを用いて解決されたモンスターに関連する話題（一意性証明と Y-表示）を紹介することが，本稿の目的である．準備として，アマルガムを中心とする幾何学的手法に関する紹介を次節で与える．

モンスターの極大局所 p-部分群がすべて分類できたことから，多くの成果が得られると期待される．例えば，モンスターの部分群複体の解析や，Dade 予想という表現論に関連した予想の検証に欠かせない対象である，根基 p-部分群（群 G の p-部分群 R で $O_p(N_G(R)) = R$ を満たすもの）が，この分類を用いてすべて決定された [28, 29].

2　アマルガムとコセット幾何の基本群

2.1　アマルガムとその普遍完備化

G を必ずしも有限ではない群とする．その有限個の部分群 $G_1, \ldots, G_r$ の合併集合 $\mathcal{A} = G_1 \cup \cdots \cup G_r$ を**アマルガム**という．アマルガム $\mathcal{A} = G_1 \cup \cdots \cup G_r$ と $\mathcal{B} = H_1 \cup \cdots \cup H_r$ が**同型**であるとは，集合 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への全単射 f で，f の G_i への制限が群 G_i と群 H_i の間の同型写像となるものが存在することである．

アマルガムとは，群 G の部分群の集まりを考えて，それらの間の交わりは考慮するが，出発点である群 G を忘れ去ったものである．もとの群 G をアマルガム $\mathcal{A}$ から復元することは，一般にはできない．しかし，G がアマルガムを構成する部分群 G_i たちから生成されていると仮定すると，その可能性を限定できる．実際，集合 $\mathcal{A}$ のすべての元を生成元とし，部分群 G_i において成り立っている関係 (G_i の乗積表) を関係式として得られる群 $U(\mathcal{A})$（アマルガムの**普遍完備化**）を考えると，G は $U(\mathcal{A})$ の剰余群となるからである．群 G_i は普遍完備化 $U(\mathcal{A})$ の部分群と同一視できる．

しかし，$U(\mathcal{A})$ を具体的に決めない限り，これ以上は何もわからない．G が有限群であっても $U(\mathcal{A})$ は一般には無限群である．さらに，群 G の存在なしに，$G_1, \ldots, G_r$ とそれらの交わりを勝手に設定してアマルガム $\mathcal{A} = G_1 \cup \cdots \cup G_r$ を考えたときには，その普遍完備化 $U(\mathcal{A})$ が単位群になり，したがって，そのような設定が無意味になる可能性すらある．

$U(\mathcal{A})$ を計算するには，次のような幾何学的方法を採用するのが標準的である．G の部分群 G_i によるコセットの全体 G/G_i を集めたものを

$$\mathcal{G} = (G/G_1) \cup \cdots \cup (G/G_r)$$

とする．この集合上に関係 $*$ を

$$xG_i * yG_j \Leftrightarrow i \neq j \text{ かつ } xG_i \cap yG_j \neq \emptyset$$
（左辺は G の部分集合と見ている）

により定める．このように構成された，関係付き集合のことを群 G の部分群 G_i $(1 \le i \le r)$ が定める**コセット幾何**と呼ぶ．群 G は集合 $\mathcal{G}$ 上に左から $(g, xG_i) \mapsto gxG_i$ により作用し，関係 $*$ を保つ．$\mathcal{G}$ の部分集合 F で，F のどの二つの元 α, β も $\alpha * \beta$ を満たすものを**旗**と呼ぶ．関係 $*$ の定義から，どの旗もたかだか一つの G/G_i の元を含む．ここで，次の仮定をしよう．

(a) G は G_i $(1 \le i \le r)$ により生成されている．

(b) $\mathcal{G}$ の極大な旗は，任意の G/G_i からちょうど一個の元を含む．

(c) 群 G は $\mathcal{G}$ の極大な旗の全体のなす集合に可移に作用する．

旗の全体 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ を頂点の集合とする（抽象）単体複体（**旗複体**）となるので，$\mathcal{F}$ の普遍被覆空間 $\tilde{\mathcal{F}}$ を考えることができる．$\mathcal{G}$ の元 α を決めれば，α に対応する $\tilde{\mathcal{F}}$ の元の全体に，基本群 π の構造が入る．上の仮定から，基本群の構造は α の取り方によらない．しかも，次が示せる．

> 普遍被覆空間 $\tilde{\mathcal{F}}$ は，群 $U(\mathcal{A})$ の部分群 G_i $(1 \le i \le r)$ が定めるコセット幾何から得られる旗複体と同型であり，$\mathcal{F}$ の基本群 π に対して $U(\mathcal{A})/\pi \cong G$ が成立する．

したがって，G を求めるためには $\mathcal{F}$ の基本群 π を計算すればよい．特に π が単位群であることと $U(\mathcal{A}) = G$ は同値である．

2.2　基本群の小さいアマルガムの発見

基本群 π の元は，複体 $\mathcal{F}$ から生じるグラフにおける閉路（の同値類）だから，それをできるだけ多くの部分が単体の周辺を与えるように分割する

(これらの部分は単位元と同値) ことにより，π の大きさが制限できる．群 G が有限であれば，単体複体 $\mathcal{F}$ は有限複体であり，その基本群 π の計算は組合せ論的ないしは有限幾何学的な問題となる．

実際には，$\mathcal{F}$ そのものではなく，$\mathcal{G}$ から構成されるグラフを考えることが多い．技法的に重要なのは，旗複体の普遍被覆空間が自分自身に一致するような，大きな部分幾何 $\mathcal{H}$ を見いだすことである．そのような $\mathcal{H}$ があれば，$\mathcal{H}$ における閉路は基本群の単位元を与えるから，部分幾何 $\mathcal{H}$ の共役たちの重なりをうまく処理していくことにより π の計算を簡略化できる．この辺の事情については，[15] を参照されたい．

以下に注意するように，r (階数) が 2 のコセット幾何 $\mathcal{G} = G_1 \cup G_2$ の基本群は無限群になってしまう．しかし，階数が 3 以上のコセット幾何の基本群が有限になる可能性は十分にある．1980 年頃から多くの有限単純群 (特に散在型) に対するコセット幾何 (アマルガム) の基本群計算が試みられた．その結果，ほとんどすべての散在型単純群に対して，基本群が小さいコセット幾何が発見された．ここには Ivanov, Shpectorov らを初めとする多くの研究者の貢献がある．個々の単純群に対する発見ではなく，統一的な説明を与えようという試みも Sawabe, S.D. Smith, Yoshiara らにより行われている．

いずれにせよ，基本群がたやすく計算できるかどうかは，コセット幾何 $\mathcal{G}$，同じことだが，初めに取った部分群 G_i $(1 \le i \le r)$ の取り方に深く依存する．リー型の単純群に対して最も有効であるのは，一つのボレル群を共有する放物型部分群であり，このときのコセット幾何は**建物**と呼ばれ，射影空間，極空間などの古典的な幾何はその一例である．C_3 型以外の階数 3 以上の有限建物の基本群は単位群である (J. Tits)．散在型の単純群に対しても，同様に扱いやすいコセット幾何 (**散在幾何**) が発見されたことが，散在型単純群の構造に対する理解の深化の要因である．

2.3 アマルガム概念の理論的使用

二つの部分群から構成されるアマルガム $\mathcal{A} = G_1 \cup G_2$ から得られる単体複体 $\mathcal{F}$ は 1 次元複体，つまり単なるグラフであるから，その普遍被覆空間 $\tilde{\mathcal{F}}$ は無限木である．そこで，上述の方法は，G に関して何らの情報も与えないように見える．しかしながら，G_i はこのグラフの一点 α_i の安定化群であり，α_i の近傍に対する G_i の作用はコセット $G_i/(G_1 \cap G_2)$ への作用として具体的にわかっている．そこで，G_i が有限群で，そのコセット $G_i/(G_1 \cap G_2)$ への作用の様子が指定されているとき，G_i そのものの構造（局所構造）の解析に，無限グラフ $\tilde{\mathcal{F}}$ を使用することができる．

例えば,「$G_1 \cap G_2$ の正規 p-部分群 P が G のシロー p-群であり，G で正規であるような G_i の部分群は単位群に限る」と仮定すると，$O_p(G_i)$ は点 α_i の近傍に属するすべての点を固定する．$O_p(G_i)$ の特性部分群 $Z_i \neq 1$ に対して，Z_i が固定しないような点と点 α_i のグラフ $\tilde{\mathcal{F}}$ における最短距離は重要な量であり，その制限を与える議論が展開できる．

有限群の局所構造理論に対するアマルガムとそのコセット幾何の使用は，有限単純群の分類完成の見通しが立った 1980 年に Goldschmidt によって導入された [9]．その後，Stellmacher, Meierfrankenfeld, Parker, Rowley, Stroth らにより，この方向の研究は著しく進展し，Glauberman の ZJ 定理などの有限群論の基本定理が全く別の形で証明され，有限単純群分類にも有効に使用できる多くの結果を生んでいる (例えば [23] 参照)．この方向を徹底的に推し進めて，階数 3 以上のコセット幾何による大局的な特徴づけ方法の進展と融合させることにより，現在の単純群分類において難しいとされている部分を簡明にしようというのが，1.2 節に紹介した有限単純群分類の第 3 世代証明計画である．

3　モンスターの横顔

3.1　モンスターの発見

モンスターは，1973 年頃 B. Fischer と R. Griess により，独立に発見されたと言われている．Fischer の発見は 3-互換から生成される群の研究の延長線上にあったと思われ，これは $2A$-元から生成される群としてのモンスターへのアプローチである．一方，Griess の発見は，1.2 節に述べたインヴォルーション（いまの場合は $2B$-元）の中心化群による特徴づけという視点からのものである．モンスター $\mathbf{M}$ は，Griess により，あるインヴォルーション σ の中心化群が次の形である有限単純群として，その存在を予測された．

$$C_{\mathbf{M}}(\sigma) \cong 2_+^{1+24}.Co_1. \tag{3.1}$$

この形を持つ群 C の同型類は一意的には決まらないが，有限単純群のインヴォルーションの中心化群となりうるものは，ただ一つである．

式 (3.1) は，$C := C_{\mathbf{M}}(\sigma)$ の最大正規 2-部分群 $Q := O_2(C)$ が位数 2^{25} の**プラス型格別 2-群**であり，それによる剰余群 C/Q が**第一コンウェイ群**と呼ばれる散在型単純群 Co_1 と同型であることを意味している．

位数 2^{1+2n} の**プラス型格別 2-群**とは，$2n$ 個のインヴォルーション v_i $(1 \leq i \leq 2n)$ から生成される群 S で $|i-j| \neq n$ ならば $(v_iv_j)^2 = 1$ であり，$|i-j| = n$ を満たすすべての i, j に対して $(v_iv_j)^2$ が一定のインヴォルーション z となるものである．したがって，$\langle z \rangle$ はこの群の中心 $Z(S)$ に一致し，剰余群 $S/Z(S)$ は位数 2^{2n} の基本可換 2-群である．上の状況 (3.1) では，σ が $Z(Q)$ に入るただ一つのインヴォルーションである．

散在型単純群 Co_1 は，**リーチ格子**と呼ばれる 24 次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^{24}$ 中の数論的格子 Λ の自己同型群の剰余群である．すなわち Λ は $\mathbf{R}^{24}$ の基底を含むような，ベクトルの和と整数倍に関して閉じた集合であって，すべての $x \in \Lambda$ に対して 標準的内積 $x \cdot x$ の値は偶整数であり，次の二つ

の条件を満たす：

(1) 任意の $x \in \Lambda$ に対し $x \cdot y$ が整数であるような $y \in \mathbf{R}^{24}$ は Λ に入る．

(2) $x \cdot x = 2$ を満たす $x \in \mathbf{R}^{24}$ は存在しない．

行列式の値 1 の直交行列で Λ を全体として動かさないものの全体は群 Co_0 をなすが，その中心は $-I_{24}$ で生成されることが示される．剰余群 $Co_0/\langle -I_{24} \rangle$ のことを Co_1 と書いて，**第一コンウェイ群**と呼ぶ．

リーチ格子 Λ の部分加群 $2\Lambda = \{2x \mid x \in \Lambda\}$ による剰余群 $\Lambda/2\Lambda$ は，位数 2^{24} の基本可換 2-群である．Co_1 は Λ に作用するので，$\Lambda/2\Lambda$ にも作用し，Co_1 を二元体 $GF(2)$ を成分とする 24 次の単位群ではない行列群として表現できる．このような表現はすべて同値である [11]．

したがって，モンスターの $2B$-元 σ の中心化群 C に戻る (式 (3.1) 参照) と，剰余群 C/Q ($\cong Co_1$) の $Q/Z(Q)$（位数 2^{24} の基本可換群）への共役による作用は，Co_1 の $\Lambda/2\Lambda$ への作用と同値である．したがって，リーチ格子の言葉を用いた具体的計算により，C の構造が精密に分析できる．

Q の中心が $\langle \sigma \rangle$ に限るから，C はモンスター $\mathbf{M}$ の 2-シロー群を含む．$\mathbf{M}$ の単純性から $Q \setminus \{\sigma\}$ と $C \setminus Q$ の双方に σ と共役なインヴォルーションが存在する．リーチ格子を用いて計算を進めていくと，$\mathbf{M}$ のインヴォルーションは，ちょうど 2 個の共役類に分かれることがわかる．σ を代表元とする共役類を $2B$，もう一つの類を $2A$ と呼んで，それぞれの類に属するインヴォルーションを **$2B$-元**，**$2A$-元**という．

$2A$-元 τ として Q に入るものが取れる．このとき $Q/Z(Q)$ ($\cong \Lambda/2\Lambda$) の元 $\tau\langle \sigma \rangle$ は，$x \cdot x = 4$ を満たすリーチ格子の元の対 $\pm x$ に相当するので，C における τ の中心化群が計算できる．このことから $\mathbf{M}$ における中心化群 $C_{\mathbf{M}}(\tau)$ の剰余群 $C_{\mathbf{M}}(\tau)/\langle \tau \rangle$ の構造が求められ，新しい散在型単純群であることがわかる．この群を BM と書いて，**ベイビーモンスター**という．同

様に，位数 3, 5, 7 の元などの C における中心化群がリーチ格子の情報を用いて計算され，これらの元の $\mathbf{M}$ における中心化群の剰余群としてトンプソン群，鈴木群，原田群，ヘルド群などの散在型単純群が得られる．

3.2 モンスターの構成

3.1 節は，あくまでも (3.1) を満たす有限単純群が存在すると仮定しての話であった．では，このような有限単純群 $\mathbf{M}$ が本当に存在することを，どのように示したらよいのだろうか？ そのため，$\mathbf{M}$ を複素数成分の行列群として具体的に書くには，最低何次元必要であるかが考察された．行列表現を C 上に制限したとき，Q と $C \setminus Q$ に属する $2B$-元に対する行列のトレース値が等しいことから，最低 $196,883 = 47 \cdot 59 \cdot 71$ 次元が必要であることが導かれた．([13, 3.2] に，より詳しい解説がある.)

モンスター $\mathbf{M}$ には，この次数の行列表現があることが予想され，それに基づき，指標表が計算された．さらに，これらの詳細な情報を仮定したもとで，J.G. Thompson は，式 (3.1) を満たす有限単純群が存在するとすれば，それは一意的に定まることを示した [25]．ここでは，C と以下に述べる 2-局所部分群 P_2 のなすアマルガム $C \cup P_2$ を $GL_{196883}(\mathbf{C})$ の中で考察している．

Q の中に σ を含む位数 4 の基本可換群 A_2 で，$A_2 \subset \{1\} \cup 2B$ であるものが存在するが，その正規化群は次の形になる

$$N_{\mathbf{M}}(A_2) \quad \sim \quad 2^{2+11+23}(M_{24} \times SL_2(2)) \tag{3.2}$$

すなわち $P_2 := N_{\mathbf{M}}(A_2)$ の最大正規 2-部分群 $R_2 := O_2(P_2)$ は位数 2^{36} の 2-群であり，P_2 の組成因子の中で R_2 の部分群の剰余群であるものの位数は 2^2 (A_2 に相当), 2^{11}, 2^{23} である．剰余群 P_2/R_2 は，24 次のマシュー群 M_{24} と線形群 $SL_2(2)$（3 次対称群 Sym_3 と同型）の直積に同型で，A_2 の中心

化群 $C_{\mathbf{M}}(A_2)$ は R_2 を含み，剰余群 $C_{\mathbf{M}}(A_2)/R_2$ は M_{24} に同型である．

24 次のマシュー群 M_{24} は散在型の単純群であって，拡大**ゴーレイ符号**と呼ばれる対象の自己同型群と捉えることができる：24 点集合 Ω の部分集合全体 $\mathbf{P}(\Omega)$ に，対称差を和として，2 元体上の 24 次元ベクトル空間の構造が入る．ゴーレイ符号 $\mathcal{G}$ とは，$\mathbf{P}(\Omega)$ の 12 次元部分空間であって，任意の $X, Y \in \mathcal{G}$ に対して（それらを Ω の部分集合と見たとき）$|X \cap Y|$ が偶数であり，$X \neq \emptyset$ ならば $|X| \geq 8$ を満たすものである．ゴーレイ符号は，Ω 上の置換による違いを除いてただ一つ存在する．Ω 上の置換であって，ゴーレイ符号を保つものの全体がなす群を **24 次のマシュー群**といい，M_{24} と記す．

ゴーレイ符号とリーチ格子，したがってマシュー群 M_{24} とコンウェイ群 Co_1 の間には密接な関係がある．リーチ格子 Λ において，互いに直交する長さ 8 の 元の 24 個の対 $\pm x_i$ $(i = 1, \ldots, 24)$ は剰余格子 $\Lambda/2\Lambda$ の一つの元 $\overline{x}$ に対応する．$\overline{x}$ から，ゴーレイ符号を取り出せ，逆にゴーレイ符号からリーチ格子を構成できる．そこで，$\Lambda/2\Lambda$ へのコンウェイ群 Co_1 の作用における $\overline{x}$ の安定化群は $2^{11} : M_{24}$（位数 2^{11} の基本可換群と M_{24} の半直積）という構造を持つことがわかる．マシュー群，コンウェイ群については [7], [17] を参照されたい．

モンスターに戻ると，P_2 は，σ を含む 3 個の $2B$-元の集合 $A_2 \setminus \{1\}$ 上に可移に作用するので，

$$|P_2 : P_2 \cap C| = 3 \tag{3.3}$$

が成立する．これが，モンスターの二つの部分群 C と P_2 の交わりに関する情報を提供する．さらに $\mathbf{M}$ は C と P_2 により生成される．

さて，[25] では，等式 (3.1), (3.2) に与えられた構造を持ち，(3.3) を満たす $GL_{196883}(\mathbf{C})$ の部分群の対 (C, P_2) が他にあれば，それを $(\overline{C}, \overline{P_2})$ とするとき，$C^g = \overline{C}$ かつ $P_2^g = \overline{P_2}$ を満たす $GL_{196883}(\mathbf{C})$ の元 g が存在することを示す．上に注意したように，どんなモンスター（等式を満たすインヴォ

ルーションの中心化群を持つ有限単純群）も，このような部分群の対により生成されるから，これはモンスターが互いに同型であることを示す．

しかしながら，モンスターが 196883 次元の行列表現を持つという大前提（とそこから生ずる細かい情報）が仮定されている．Griess は，この大前提を具体的に示すことにより，モンスターを構成した [10]．すなわち，$GL_{196883}(\mathbf{C})$ の部分群 C, P_2 で等式 (3.1), (3.2) の形を持ち，(3.3) を満たすように交わるものを構成し，それらが生成する群が有限単純群であることを示したのである．

この構成は大変込み入っている．実際には 196883 次元の表現空間に 1 次元の自明加群を加えた 196884 次の空間 V 上に，ある積（結合法則を満たさない）と内積を定義する．この V を**グライス代数**と呼ぶ．上記の構造を持ち，積と内積を不変にするような群 C と P_2 を $GL(V)$ 中に構成する．積の構造を，具体的な基底を用いて精密に書き下し，延々とした計算の後に，$P_2 \setminus C$ の元が得られるのである．C と P_2 が生成する部分群 G が有限であることが導かれる．G の単純性が示され，条件 (3.1) が確認される．その後，Tits および Conway 等により，この構成の簡略化が試みられている．

3.3　モンスターと頂点作用素代数

グライス代数の構成が確定する以前から，MaKay-Thompson に始まり Conway-Norton [5] と深化していった**ムーンシャイン予想**を通じて，モンスターがモジュラー関数と深い関係にあることが観察されていた．その説明を与える対象として，無限個の積を持つ無限次元の次数付き代数構造 $V^\natural$ で，次数 2 の部分がグライス代数となるものの存在が予想された．これを**ムーンシャイン加群**という．Frenkel, Lepowsky, Meurman による著書 [8] において，ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は頂点作用素代数として構成され，Borchards がムーンシャイン予想に証明を与えた [3]．それ以降，群論の立場からの頂

点作用素代数の研究が進展し，宮本雅彦氏による，小さな頂点作用素代数を用いたムーンシャイン加群とモンスターの新構成 [21] など，近年の輝かしい成果が登場する．こうした動きについては，頂点作用素代数と群論の関係にいち早く目を向けた先駆者の一人である原田耕一郎氏の著書 [13] を参照されたい．

今のところ，ムーンシャイン加群を用いても，モンスターの構造そのものに対しては多くの情報が得られない．$2A$-元については相当にわかるが，$2B$-元のなす基本可換群に対する情報はまだまだ不足のようにも思われる．ムーンシャイン加群の自己同型がモンスターであることを示すには，有限群論の援用がかなり必要であり，その位数すら簡単には導けないというのが現状である．

3.4　モンスターの幾何

すでに C と P_2 というモンスターの二つの 2-局所部分群について紹介した．1979 年頃までに，モンスターの 2-シロー群の正規化群を含む 2-局所部分群の多くが発見された．それらのいくつかのなすアマルガムのコセット幾何は，標数 2 の体上で定義されたリー型の有限単純群において，一つの 2-シロー群の正規化群（ボレル部分群）を含む極大 2-局所部分群のなすアマルガムのコセット幾何（建物）に類似していることが観察された．建物は，射影平面や階数 2 の古典極空間を貼り合わせた形の構造を持つが，モンスターのあるアマルガムに対する階数 5 のコセット幾何も，射影平面と階数 2 の極空間の例外的な被覆から構成されるのである．

4 節で示すように，$\mathbf{M}$ の位数 2^5 の基本可換 2-群 $A_5^{(1)}$ で次の性質を満たすものが存在する：$\langle\sigma\rangle \subset A_2 \subset A_5^{(1)} \subset 2B\cup\{1\}$ で，その中心化群 $C_{\mathbf{M}}(A_5^{(1)})$ は位数 2^{36} であり，$N_{\mathbf{M}}(A_5^{(1)})$ は $A_5^{(1)}$ 上に $SL_5(2)$ を引き起こす．その部分群の列 $A_2 \subset A_3 \subset A_4$, $|A_i| = 2^i$ $(i = 3, 4)$ を取り，正規化群 $P_i := N_{\mathbf{M}}(A_i)$

を考える $(i=3,4)$．部分群 C, P_i $(i=2,3,4)$, $P_5^{(1)} := N_{\mathbf{M}}(A_5^{(1)})$ のコセットからできる幾何 $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ を，モンスターの**チルダ幾何**と呼ぶ．この幾何の対象は，単に $A_5^{(1)}$ と共役な基本可換群の単位元と異なる部分群で，それらの結合関係は，包含関係で定まると考えてもよい．

この幾何 $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ を構成する 2-局所部分群のおおよその形と，それらの交わりを示す**ダイアグラム**を図 1 に示す．このダイアグラムの頂点は，左から順に部分群 C, P_i $(i=2,3,4)$, $P_5^{(1)}$（によるコセット）に対応している．極大旗 $\{C, P_i\,(i=2,3,4), P_5^{(1)}\}$ から二つの頂点 P, Q を取るとき，これら以外の極大旗のメンバーすべてと関係するコセット $(\mathbf{M}/P)\cup(\mathbf{M}/Q)$ のなす，階数 2 の結合構造（**剰余構造**）を表しているのが，二つの頂点を結ぶ記号である．何もないのは，これら 2 種類のどのコセットも $xP\cap yQ\neq\emptyset$ を満たすことであり，単線分は射影平面を表す．図 1 の右端にあるチルダ付き二重線分は，次に定義するチルダ幾何を表す．

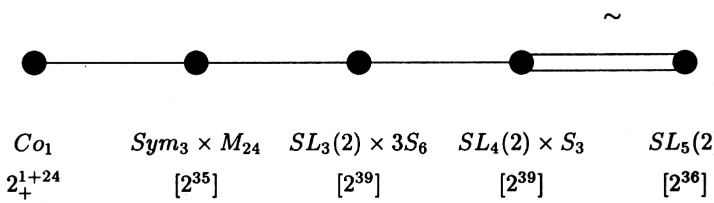


図 1　モンスターのチルダ幾何

6 点集合 Ω の二点部分集合を点，2^3 型の分割を線と呼び，点が線の上にあるのは，対応する二点部分集合が対応する分割の構成メンバーに含まれるときと定義すると，位数 2 の**一般四辺形**と呼ばれる建物が得られるが，その上に対称群 Sym_6 が作用する．この構造は Sym_6 の 2-シロー群を共有する部分群 $Sym_2\times Sym_4$ と $2^3:Sym_3$ のなすアマルガムに対するコセット幾何とも表現できる．自明な中心を持ち，分裂しない中心拡大 $3.Alt_6$ を指数 2 で含む $3.Sym_6$ の形の群が存在するが，この群における上の形の部分群の

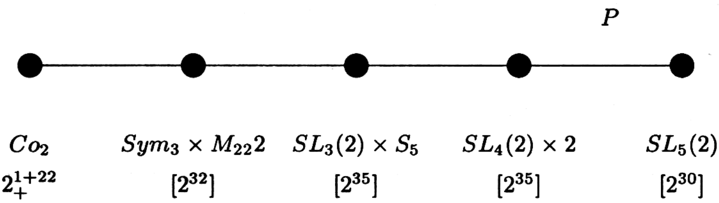


図 2　ベイビーモンスターの P-幾何

なすアマルガムのコセット幾何を（階数 2 の）**チルダ幾何**という.

4 節で示すように，A_4 を含む位数 2^5 の基本可換群で，その正規部分群が P_4 を含むものが存在し，P_4 は極大 2-局所部分群ではない．また $P_5^{(1)}$ もある 2-局所部分群に含まれるので，極大 2-局所部分群ではない.

$2A$-元 τ を取ると，τ と可換な基本可換群のみを取り出して，上の幾何の部分幾何ができる．それは，ベイビーモンスター $C_{\mathbf{M}}(\tau)/\langle\tau\rangle$ のある 2-局所部分群のなすアマルガムのコセット幾何でもある．この幾何のダイアグラムが図 2 である．この図の一番右の線分に対応する剰余構造として**ペーターセン幾何**と呼ばれるものが現れる．これは先述の位数 2 の一般四辺形から一文字 6 を除いて得られる補構造であり，ペーターセングラフの頂点を点，辺を線と見て，包含関係を結合関係としたときにできる結合構造でもある.

モンスターとベイビーモンスターに付随する幾何について紹介したが，他の散在型の単純群についても，適当なアマルガムから面白い幾何が構成できる．完全グラフの頂点と辺からなる階数 2 の幾何を**サークル幾何**という．ほとんどすべての散在型単純群に対して，それが旗上可移に作用するような幾何で，その剰余構造が，射影平面・階数 2 の極空間等の階数 2 の建物，サークル幾何，チルダ幾何，ペーターセン幾何のどれかになるものが存在する．根源的な理由は不明であるが，これらの小さな幾何が散在型単純群を統制しているのである．階数 2 の建物については，Tits-Weiss によるムーファン

多辺形の分類 [26] が最近の大きな成果であり，群論への多くの応用がある．

3.5 モンスターのY-表示

3.4節で述べた幾何は，建物の類似としてそれ自身興味深い存在であるが，Y-表示を持つ群の決定にこれらの幾何が有効に用いられる，という事実からも注目を集めた．

Y-表示とは，16個の生成元 a, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i $(i = 1, 2, 3)$ の間に成り立つ関係式である．まず，これらの生成元 x はすべて $x^2 = 1$ を満たし，生成元 x, y は $(xy)^2 = 1$ または $(xy)^3 = 1$ を満たす．これらの生成元を頂点とするグラフを考え，$(xy)^3 = 1$ のとき，かつそのときに限り頂点 x, y を結ぶと，Y-表示に現れる関係式は，図3のように表示される．(この形がY-表示の名称の由来である．)

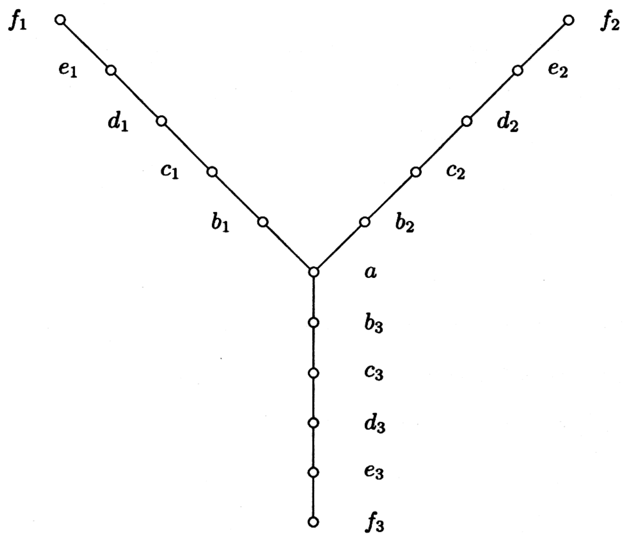


図3　Y-表示

最後の関係式として,「蜘蛛(くも)の巣関係式」とも呼ばれる次の式を仮定する.

$$(ab_1c_1 \cdot ab_2c_2 \cdot ab_3c_3)^{10} = 1. \tag{3.4}$$

以上すべての関係式を満たす上記 16 個の元から生成される群を, **Y-表示**を持つ群といい, Y_{555} と書く.

この定義からは Y_{555} は有限群であることすらわからないが, 驚くべきことに, Y_{555} は 2 個のモンスターの直積 $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ を指数 2 の部分群に持ち, 直積因子を交換するインヴォルーションを持つ有限群 (**バイモンスター**) と同型になることが示せる. ただし, その証明にはモンスターの存在が必要である. モンスターの存在なしには Y-表示を持つ群が位数 2 の群に潰れてしまう可能性を排除できないからである. したがって, 今のところモンスターを「Y-表示を持つ有限群の交換子部分群の直積因子」として, (グライス代数やムーンシャイン加群を構成することなしに) 直接定義することはできない.

モンスターの存在を仮定すれば, バイモンスターが存在して Y-表示の関係式を満たすことが示せる [6, 24]. そこで, Y_{555} からバイモンスターへの全射準同型が存在するが, 実はこれが同型になることが 1990 年の Durham における研究集会において Norton と A.A. Ivanov の結果を合わせて証明された.

モンスターのチルダ幾何 $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ を構成する第 3 の 2-局所部分群 P_3 を取り, アマルガム $C \cup P_2 \cup P_3$ を考える. $P_3 \cap C$ と $P_3 \cap P_2$ は P_3 の指数 7 の部分群で, これらによるコセットへの P_3 の作用は, $SL_3(2)$ の位数 2 の射影平面の点と線への作用に同値である. 前に注意したように $|P_2 : C \cap P_2| = 3$ である. Ivanov は, 2.2 節に紹介した方法を用いて次を示した [14].

「部分群 C, P_2, P_3 のおおよその形が図 1 に示されたもので, それらの交わりが上の条件を満たしているとする. このとき, C, P_2, P_3 が生成する群は, モンスターに同型である.」

この証明の大筋を見ておこう．C, P_2, P_3 により生成される任意の群 F（モンスター $\mathbf{M}$ もその一つである）に対して，C のある $2A$-元 τ を取ると，その中心化群 L が $C_{\mathbf{M}}(\tau)$（ベイビーモンスターの非分裂中心拡大）と同型であることを，ベイビーモンスターの P-幾何を構成することにより示す．次に，モンスターにおける 3 個の $2A$-元を含む位数 2^2 の基本可換群の正規化群に相当する部分群 L_2 を作る．この部分群は $2^2.{}^2E_6(2).Sym_3$ という形をしている．（ここで ${}^2E_6(2)$ は E_6 型のシュヴァレー群の変形）．F 中のアマルガム $C \cup L \cup L_2$ が，モンスターの対応するアマルガムと同型であることが示される．そこで，前者のなすコセット幾何と，モンスターにおいて対応するコセット幾何の普遍被覆空間は同型である．モンスター $\mathbf{M}$ の部分群 L によるコセット上に定義したグラフを通じて，基本群を計算すると，普遍被覆空間はモンスターのコセット幾何自身であることがわかる．そこで F と $\mathbf{M}$ のコセット幾何は同型で，F と $\mathbf{M}$ は同型になる．

この事実から，モンスターのチルダ幾何に旗上可移に作用する群はモンスターに限ること等も導かれる．一方，Norton は詳細な計算を行って，Y_{555} のモンスターに対応する部分群 F において，上の条件を満たすアマルガムを構成して見せたのである [22]．したがって，この部分群 F はモンスターと同型になり，Y_{555} がバイモンスターと同型になることがわかる．

3.6　モンスターの一意性

一意性を示す議論においてもまた，アマルガムの考え方が重要であり，モンスターの幾何が有用な道具となる．その原型は J.G. Thompson の論文 [25] に見られるが，その後，適当なアマルガムのコセット幾何の基本群を計算するという筋道で，いくつかの証明が与えられている．

2 節で見たように，Ivanov の結果 [14] はモンスターの階数 3 のアマルガムによる特徴づけとも見なせる．モンスターが C と L に同型なインヴォ

ルーションの中心化群を持つ唯一の単純群であることは，[12] で初めて示されたが，Aschbacher-Segev は，アマルガムの考えにそって，これをさらに簡明にした．ここでは，3.5 節の最後に使われたアマルガム $C \cup L \cup L_2$ のコセット幾何が使われている．

一般に，うまく交わる 3 種類以上の部分群を構成し，そのコセット幾何の普遍被覆空間が単連結であることを（その大きな部分幾何等を援用して）示すことにより，与えられた設定を満たす部分群を持つ（単純）群の一意性が得られる．[1] の第 12, 13 章を参照されたい．

4　モンスターの極大 2-局所部分群

いままで述べてきたように，モンスターの 2-局所部分群は，モンスターの性質を知る上で鍵となる構造である．モンスターのうまいアマルガム（とそのコセット幾何）は，モンスターの一意性や，バイモンスターが Y-表示を持つという事実を示すのに欠かせない道具である．これらのアマルガムを構成するのにも，2-局所部分群とそれらの交わりに関する知識が必要不可欠である．ところが，極大な 2-局所部分群をすべて決定しようという試みは長らく成功せず，ようやく 2002 年頃に Shpectorov と Meierfrankenfeld が幾何学的な議論によって，その分類を完成した．最後に，その結果と証明の大筋をふり返ってみよう．

まず，鍵となるのは特異部分群という概念である．$2B$-元 x に対して $Q_x := O_2(C_{\mathbf{M}}(x))$ とおく．二つの $2B$-元 x, y が $x \in Q_y$ を満たすとき，x は y に**直交する**という．直交するという関係は，対称的であることが示せる．$2B \cup \{1\}$ に含まれる基本可換 2-群 A のすべてのインヴォルーションが互いに直交するとき，A は**特異**であるという．$2B$-元の中心化群 C が標数 2-型 ($C_{\mathbf{M}}(Q_\sigma) \subset Q_\sigma$) であることから，位数 2^m の特異部分群 A に対して

$N_{\mathbf{M}}(A)/C_{\mathbf{M}}(A)$ は線形群 $SL_m(2)$（これは A の自己同型群全体である）に同型であることが示せる．すると，$2B$-元 σ から出発して，σ を含む特異群の共役類とその中心化群を，小さな特異群から順に定めていくことができる．これが可能なのは，C/Q_σ の $Q_\sigma/Z(Q_\sigma)$ への作用がコンウェイ群 Co_1 の剰余リーチ格子 $\Lambda/2\Lambda$ への作用と同値だからであり，計算にあたってはリーチ格子とゴーレイ符号上へのコンウェイ群とマシュー群の作用に関する細かい情報が必要とされる．

特異部分群はたかだか位数 2^5 であることがわかる．$i = 1,2,3,4$ のそれぞれに対して 位数 2^i の特異部分群は互いに共役であり（代表元を A_i と書く），位数 2^5 の特異部分群は二つの共役類に分かれる（代表元を $A_5^{(1)}$, $A_5^{(2)}$ と書く）．$A_5^{(1)}$ と $A_5^{(2)}$ の中心化群の位数はそれぞれ 2^{36}, $2^{36} \cdot 3$ である．

3.4 節で紹介したモンスターのチルダ幾何の対象は $P_i := N_{\mathbf{M}}(A_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ と $P_5^{(1)} := N_{\mathbf{M}}(A_5^{(1)})$ である．A_4 を含む $A_5^{(2)}$ の共役がただ一つあるので，P_4 は $P_5^{(2)} := N_{\mathbf{M}}(A_5^{(2)})$ の部分群に共役である．また，$A_5^{(1)}$ に含まれる A_4 の共役のそれぞれに対して，それを含む $A_5^{(2)}$ の（ただ一つの）共役を考えて，これらの生成する部分群 A を考えると，A は位数 2^{10} の基本可換 2-群であることがわかる．A は $A_5^{(1)}$ により一意的に定まるので $P_5^{(1)} \leq N_{\mathbf{M}}(A)$ である．A は特異ではないが，どの特異部分群の共役類の代表も含む．この意味で Meierfrankenfeld と Shpectorov は A を**箱船**と呼んでいる．箱船 A の $2A$-元, $2B$-元において 1, 0 という値を取る関数 f を考えると，f は 2 元体の 10 次元ベクトル空間 A 上の非特異な直交形式となり，特異部分群はこの形式に関する特異部分空間になる．位数 2^5 の特異部分群の存在から f はプラス型である．$C_{\mathbf{M}}(A)$ は位数 2^{26} と計算され，剰余群 $N_{\mathbf{M}}(A)/C_{\mathbf{M}}(A)$ は直交形式 f を保つので，直交群の交換子群 $\Omega_{10}^{+}(2)$ となることが示される．

さて，以上により C, P_i $(i = 1,2,3)$, $P_5^{(2)}$, $P_{10} := N_{\mathbf{M}}(A)$ という，特異

部分群または箱船の正規化群という形の 2-局所部分群が得られた．これに 3.5 節で現れた部分群 L と L_2 を加えて，モンスターの極大局所部分群の完全なリスト（共役による違いは無視する）ができあがる．この事実の証明は次のように行われる．まず，標数 2 型でないような 2-局所部分群 X を考えると，このような群は，$U \subset 2A \cup \{1\}$ を満たす基本可換 2-群 U の正規化群に含まれることが示せる．この条件を満たす U は位数 2^2 以下で，これから X は L または L_2 の部分群に共役となる．そこで，標数 2-型の 2-局所部分群 X の分類が問題となる．$O_2(X)$ の中心に含まれるインヴォルーションの生成する部分群を E とする．E が $2B$-元を含むことを示し，E 中の $2B$-元 x で $Q_x \cap E$ の位数が最大になるものを集めた集合 I を考える．I が生成する部分群が，特異部分群か箱船であることを示すのがポイントであるが，詳細は [19] に委ねる． これから X は特異部分群ないしは箱船の正規化群となり，上に注意したこれらの部分群間の包含関係から，X は C, P_i $(i = 1, 2, 3)$, $P_5^{(2)}$, P_{10} のどれかに含まれる．

結果をまとめておく．表には，極大 2-局所部分群の O_2-部分に含まれる組成因子も示してある．

定理 2 モンスターの 極大 2-局所部分群は次の 7 個の群のどれかに共役である．表の右側の 2-局所部分群は標数 2-型であり，左側はそうでない．

L	$\sim$	$2.BM$	C	$\sim$	$2_+^{1+24}.Co_1$
L_2	$\sim$	$2^2.{}^2E_6(2).Sym_3$	P_2	$\sim$	$2^2.2^{11}.2^{22}.(M_{24} \times SL_2(2))$
			P_3	$\sim$	$2^3.2^6.2^{12}.2^{18}.(3 \cdot Sym_6 \times SL_3(2))$
			$P_5^{(2)}$	$\sim$	$2^5.2^{10}.2^{20}.(Sym_3 \times SL_5(2))$
			P_{10}	$\sim$	$2^{10+16}\Omega_{10}^+(2)$

参考文献

[1] M. Aschbacher : *Sporadic groups*, Cambridge Tracts in Math. **104**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] M. Aschbacher and S.D. Smith : *The classification of quasithin groups. I, II* Math. Surveys and Monographs, **111**, **112**, Amer. Math. Soc., 2004.

[3] R. Borchards : Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebra, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

[4] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson : *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[5] J.H. Conway and S.P. Norton : Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.

[6] J.H. Conway, S.P. Norton and L.H. Soicher : The bimonster, the group Y_{555} and the projective plane of order 3, pp.27–50 in: *Computers in Algebra* (M.C. Tangora ed.), Marcell Dekker, 1988.

[7] J.H. Conway and N.J.A. Sloane : *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1988.

[8] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman : *Vertex Operator Algebra and the Monster*, Academic press, New York, 1988.

[9] D. Goldschmidt : Automorphisms of trivalent graphs, *Ann. of Math.* **111** (1980), 377-406.

[10] R.L. Griess : Friendly Giant, *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[11] R.L. Griess : A remark about representations of ·1, *Comm. Alg.* **13** (1985), 835–844.

[12] R.L. Griess, U. Meierfrankenfeld and Y. Segev : A uniqueness proof for the Monster, *Ann.Math.* **130** (1989), 567–602.

[13] 原田耕一郎 :『モンスター — 群の広がり』, 岩波書店, 1999.

[14] A.A. Ivanov : A geometric characterization of the Monster, pp.46–62 in: *Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 1990* (M. Liebeck and J. Saxl eds.), London Math. Soc. Lect. Notes. **165** (1992), Cambridge Univ. Press.

[15] A.A. Ivanov : Geometric presentations of groups with an application to the Monster, pp. 1443–1453 in: *Proc. Int. Cong. Math. (Kyoto 1990)*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[16] P. Kleidman and M. Liebeck : *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **129**, 1990, Cambridge Univ. Press.

[17] 近藤 武：講義録「Mathieu 群と Conway 群」，近藤武先生還暦記念論文集に収録，1996.

[18] U. Meierfrankenfeld : Maximal 2-local subgroups of the Monster and Baby Monster, II, preprint, September 6, 2002.

[19] U. Meierfrankenfeld and S. Shpectorov : Maximal 2-local subgroups of the Monster and Baby Monster, preprint, September 6, 2002.

[20] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher and G. Stroth : Finite groups of local characteristic p, An overview, *Groups, Combinatorics and geometry* (Durham, 2001), 155–192, World Sci. Publishing, 2003.

[21] M. Miyamoto : A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. Math.*, **159** (2004), 535–596.

[22] S.P. Norton : Constructing the Monster, pp.63–76 in: *Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 1990* (M. Liebeck and J. Saxl eds.), London Math. Soc. Lect. Notes. **165** (1992), Cambridge Univ. Press.

[23] C. Parker and P. Rowley : *Symplectic Amalgams*, Springer Monographs in Math., Springer, 2002.

[24] L.H. Soicher : From the Monster to the Bimonster, *J.Algebra* **121** (1989), 275–280.

[25] J.G. Thompson : Uniqueness of the Fischer-Griess Monster, *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 340–346.

[26] J. Tits and R. Weiss : *Moufang polygons*, Springer Monographs in Math., Springer, 2002.

[27] R.A. Wilson : The odd-local subgroups of the Monster, *J. Austral. Math. Soc.* **44** (1988), 1–16.

[28] S. Yoshiara : Radical 2-subgroups of the Monster and the Baby Monster, *J.Algebra* **287** (2005), 123–139.

[29] S. Yoshiara : Odd radical subgroups of some sporadic simple groups, *J.Algebra* **291** (2005), 90–107.

W代数の話

スーパー・コンフォーマル代数の表現論へ

脇本 実

1　まえがき

今は昔のことであるが，数学者や物理学者のあいだに群論病 (Gruppenpest) が流行した時代があったそうである．量子力学や結晶構造などすべての物理現象は，ある種の“対称性”を内蔵している．その対称性はまさに群の作用での不変性として記述され，それらの研究に群の表現論を適用することができる，ということが認識されたために発生した病であった．

対称性を記述するために用いられる代数系の筆頭は，有限群やリー群，そしてリー環であるが，これらが数学の他分野や物理学と関係してきた背景は，主に次のような理由による：

1)　物理学に現れる線型作用素（ラプラシアンやダランベリアンなど）はリー群の作用で不変 (invariant) であり，したがってその方程式の解の空間はリー群の作用で不変 (stable) である．すなわち，リー群の表現空間である．
2)　特殊函数や超幾何函数は，表現の行列要素として捉えることができる．

などなど….

上に述べた“リー群”や“リー環”は，普通の有限次元のリー群・リー環であるが，20 世紀の後半にデビューした無限次元リー環の世界はそれ以上に美しい．無限次元リー環と，物理学や数学などとの関係は，有限次元リー環のときとはかなり異なる様相を見せる．例えば

1)　指標や分岐函数にモジュラー性質が現れること，
2)　マクドナルド恒等式や代数的組合せ論との関係，
3)　非線型偏微分方程式のヒエラルヒーやそれの解空間の構造に内在する対称性

などなどなど….

一口に“無限次元(スーパー)リー環”といっても，もちろんいろいろある．例えば，多様体の可微分同型写像のなすリー群のリー環，すなわち多様体のベクトル場のなすリー環は無限次元リー環である．しかし，私が特に興味を持って研究しているのは，その中でも特にきれいなクラス，すなわち

(1)　アフィン・(スーパー)リー環
(2)　スーパー・コンフォーマル代数

である．

アフィン・(スーパー)リー環とスーパー・コンフォーマル代数とでは，構造に大きな相異がある．アフィン・リー環には「ルート系・不変内積・ワイル群」という3点セットがあり，これらは構造論・表現論の研究に大活躍をする．例えば，可積分な既約表現の指標公式はワイル群で記述される．ところが，スーパー・コンフォーマル代数には不変内積もワイル群もない．ルート系は「あると言えばある」けれども，その性質は普通のルート系と少し異なっていて“擬ルート系”と呼ばれることもある．

このように，アフィン・リー環の表現論を研究するための重要な道具が，スーパー・コンフォーマル代数にはないのである．そのため表現論は1980年代以降，主として物理学者の側から原始的方法や物理的な方法で研究されてきたが，原始的に直接に計算するという方法には自ずと限界がある．いくつかを具体的に計算して，そのデータから予想された公式は，正しいに違いないとは思うものの，このままでは理論になりえない．数学的な研究手法が

ないために，スーパー・コンフォーマル代数の表現論は，数学的には未開地であった．

同じ無限次元リー環の仲間と言っても，アフィン・リー環との貧富の差はあまりに大きい．このような状況のもとで，スーパー・コンフォーマル代数の表現論を研究するひとつの道は，アフィン・リー環と仲良くつき合うことかも知れない．アフィン・リー環には上述したように３点セットがあり，その表現論は数学・物理学のあちらこちらの分野で活躍している．そこで「アフィン・リー環と仲良しになって，その豊富なユーティリティや表現論を共有することができたら…」と，ついつい思いたくなる．

それは夢物語ではない．それが，まさしくＷ代数である．数学では，夢が現実になるときが，いちばん楽しい．

1990年にFeigin-FrenkelはDrinfeld-Sokolovリダクションの量子化によってアフィン・リー環のＷ代数を構成する理論を提唱した．よく知られているように，この理論により，Zamolodchikovの W_n 代数は $\widehat{sl}(n,\mathbf{C})$ のＷ代数として構成され，その表現論は $\widehat{sl}(n,\mathbf{C})$ の表現論から計算することができる．

「この理論をアフィン・スーパー・リー環に拡張することができないか?」

そして，もしそれがうまくゆけば，

「アフィン・スーパー・リー環のＷ代数として，多くの，もしかするとほとんどすべてのスーパー・コンフォーマル代数が得られるのではないだろうか？」

というのは誰しも考えることだと思う．しかし，彼らの理論をアフィン・スーパー・リー環へ拡張することは，決して容易な問題ではなかった．アフィン・スーパー・リー環のＷ代数に到達するまでには，いくつかの障碍があり，そ

れを乗り越えるには，セミが土の中で過ごす期間より長い年月にわたる模索と試行錯誤の繰り返しが必要であった．しかし，ひとたび見えてしまうと，その道は至極自然で，あたりまえのものに思える．

ヴィラソロ代数の表現論とその応用は，Kac が 1979 年に証明なしに発表した行列式公式から始まった．その行列式公式の足場を確立するためには，ヴァーマ加群の特異ベクトルの分布についての Feigin-Fucks による長大な議論（1984 年）が必要であったことは周知である．Feigin-Fucks による証明とは別に，Kac の行列式公式を用いて物理学者の研究は急速に進展した．また，アフィン・リー環との結びつきを用いて，ヴィラソロ代数のユニタリー離散系列や極小系列の分類およびそれらの指標公式などが次々と得られた．それを契機にヴィラソロ代数は，可解格子模型など，数学・数理物理学のいろいろな分野において，めざましい活躍を始めた．まさしく，1980 ～ 90 年代はヴィラソロ代数がデビューし，美しく開花した少女時代であった．その後，ヴィラソロ代数は頂点作用素代数においても最も重要な位置を占めるほどに成長していった．

それに比べて，ヴィラソロ代数以外のスーパー・コンフォーマル代数の理論は，ヴィラソロ代数に大きく立ち後れてしまった．スーパー・コンフォーマル代数を研究する手法がなかったからである．しかし今，スーパー・コンフォーマル代数とアフィン・スーパー・リー環を結ぶ橋が開通した．W 代数の理論は，アフィン・スーパー・リー環からスーパー・コンフォーマル代数へのファンクター (functor) であり，単に代数系の対応だけでなく，アフィン・スーパー・リー環の表現論をスーパー・コンフォーマル代数の表現論に移す．まさに物資を輸送する橋なのである．スーパー・コンフォーマル代数の表現論の夜明けであり，ヴィラソロ代数にとっての 1980 年代と同じ状況である．

それと同時に，W 代数を通して得られるアフィン・スーパー・リー環と

スーパー・コンフォーマル代数との深い結びつきは，アフィン・スーパー・リー環の表現論の重要性を高め，その研究の必要性を刺激することにもなる．

スーパー・コンフォーマル代数の島の人口は ∞ であるが，その中にはヴィラソロ代数のほかに，N=1，N=2，N=3，N=4，ビッグ N=4（N=4 の腹違いのお姉さん），…という可愛いいアイドルたちが，いっぱい住んでいる．彼女たちは，美しく，瑞々(みずみず)しく，可愛いくて，魅力に満ちている．かつてのヴィラソロ代数と同じように，彼女たちもこれから，どんどん活躍の場を広げて，ますます美しく成長していくにちがいない．

本稿はその W 代数の紹介であるが，紙数の制限のために多くの事柄や具体例などを割愛せざるを得なかった．本稿のもとになった [27] と合わせて読んでいただければと思う．

2　準備 ～ 作用素解析

無限次元(スーパー)リー環のブラケット積の計算には，“場” (field) の正規積や作用素積を用いるのが非常に便利であり，複雑な計算がこれによって非常に見通し良くそして簡単になる．この節では 作用素解析についての基本的な定義と公式をまとめておく．詳細は [16], [24] などを参照していただきたい．またスーパー・リー環の定義やカルタン部分環，ルート系，偶ルート，奇ルート，不変内積などの基本的な概念については [14], [25], [26] などを参照していただきたい．またアフィン・リー環の構造と表現については [15] が最良のテキストである．

形式的なローラン冪(べき)級数

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \tag{2.1}$$

を場という．ここで $a_{(n)}$ は或(あ)る（スーパー）リー環の線型変換であり，$a_{(n)}$

を $a(z)$ のフーリエ成分と呼ぶ．二つの場 $a(z), b(z)$ について，それらのブラケット積

$$\begin{aligned}[a(z),\, b(w)] &= \left[\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_{(m)}z^{-m-1},\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_{(n)}w^{-n-1}\right] \\ &= \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} [a_{(m)},\, b_{(n)}]z^{-m-1}w^{-n-1}\end{aligned}$$

が

$$[a(z),\, b(w)] = (\iota_{z,w} - \iota_{w,z})\sum_{j=0}^{N} \frac{X^{[j]}(w)}{(z-w)^{j+1}} \tag{2.2}$$

の形になるとき[1]，

$$[a_\lambda b] = \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda^j}{j!} X^{[j]} \tag{2.3a}$$

と書き，$[a_\lambda b]$ を $a(z)$ と $b(z)$ との λ **ブラケット**と呼ぶ．ここで，各 j について $X^{[j]}(w) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} X^{[j]}_{(n)} w^{-n-1}$ は場であり，$\iota_{z,w}$ は領域 $|z| > |w|$ におけるテイラー級数展開を意味する．

Note 2.1. 頂点代数において，式 (2.3a) の $X^{[j]}$ は実は $a_{(j)}b$，すなわち頂点代数の元 b に頂点代数の線型写像 $a_{(j)}$ を作用させたものになっている[2]．したがって，(2.3a) は

$$[a_\lambda b] = \sum_{\substack{j\geq 0 \\ \text{有限和}}} \frac{\lambda^j}{j!} a_{(j)} b \tag{2.3b}$$

ということである．□

---

[1] このとき，"$a(z)$ と $b(z)$ とは局所的 (local) である" という ([16])．そして関係式 (2.2) は，文献で $a(z)b(w) \sim \sum_{j=0}^{N} \frac{X^{[j]}(w)}{(z-w)^{j+1}}$ と書かれることが多い．

[2] これらの詳細については Kac の本 [16] を参照されたい．

例 2.1. $\mathfrak{g}$ を有限次元(スーパー)リー環として，それのアフィン化によって得られる無限次元(スーパー)リー環

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(t^n \otimes \mathfrak{g}) + \mathbf{C}K + \mathbf{C}d$$

を考える．ここで，K は中心元であり，$d = t\dfrac{d}{dt}$ である．$X, Y \in \mathfrak{g}$ のとき，$\widehat{\mathfrak{g}}$ におけるブラケット積

$$[t^m \otimes X,\, t^n \otimes Y] \;=\; t^{m+n} \otimes [X,\, Y] + m(X|Y)K\delta_{m+n,0}$$

は，X, Y の定める場[3]

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(t^n \otimes X)z^{-n-1}, \qquad Y(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(t^n \otimes Y)z^{-n-1} \tag{2.4}$$

の λ ブラケットに翻訳すると次の関係式になる：

$$[X_\lambda Y] = [X, Y] + \lambda K(X|Y) \tag{2.5}$$

ここで，(2.5) における X, Y, $[X, Y]$ は，$\mathfrak{g}$ の元 X, Y, $[X, Y]$ の定めるカレントである．$X \in \mathfrak{g}$ のとき，$t^n \otimes X$ を $X_{(n)}$ と表記することが多い．　□

例 2.2. **ヴィラソロ代数**は L_n $(n \in \mathbf{Z})$ と中心元 c の張るベクトル空間

$$Vir \;=\; \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}L_n \oplus \mathbf{C}c$$

に次のブラケット積を入れて得られるリー環である：

$$[L_m,\, L_n] \;=\; (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}c. \tag{2.6}$$

このブラケット積 (2.6) は，**ヴィラソロ場**

$$L(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \;=\; \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_{(n)} z^{-n-1}$$

[3] (2.4) の場 $X(z)$, $Y(z)$ をカレントとも呼ぶ．

(ただし $L_{(n)} := L_{n-1}$) の λ ブラケットで書くと次のようになる：

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{\lambda^3}{12}c. \tag{2.7}$$

□

リー環のブラケット積が線型性，歪対称性，ヤコビ恒等式を満たすのと同じように，λ ブラケットは次の基本性質をもつ[4]：

補題 2.1.　1)　(割増し線型性)

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b], \quad [a_\lambda \partial b] = (\partial + \lambda)[a_\lambda b]$$

2)　(歪対称性)　$[a_\lambda b] = -(-1)^{|a||b|}[b_{-\partial-\lambda}a]$

3)　(Borcherds-Jacobi-Kac 恒等式)

$$[a_\lambda[b_\mu c]] - (-1)^{|a||b|}[b_\mu[a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]$$

□

次に正規積を考えよう．2 個の場 $a(z)$ と $b(z)$ との**正規積** $:a(z)b(z):$ を次の式で定義する：

$$:a(z)b(z): := a(z)_+ b(z) + (-1)^{|a||b|} b(z)a(z)_- \tag{2.8a}$$

ここで $a(z)_\pm$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned} a(z)_+ &:= \sum_{-(n+1)\geqq 0} a_{(n)} z^{-(n+1)} = \sum_{n<0} a_{(n)} z^{-n-1}, \\ a(z)_- &:= \sum_{-(n+1)<0} a_{(n)} z^{-(n+1)} = \sum_{n\geqq 0} a_{(n)} z^{-n-1}. \end{aligned} \tag{2.8b}$$

---

[4] この補題の公式および，これ以降の本稿の記述において，$|a|$ は a のパリティを表す．すなわち　$|a| := \begin{cases} 0 & (a \text{ が偶元のとき}) \\ 1 & (a \text{ が奇元のとき}) \end{cases}$　とおく．

$a(z)$ と $b(z)$ の正規積を $:ab:(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} :ab:_{(n)}\, z^{-n-1}$ と書けば，$:ab:$ のフーリエ成分 $:ab:_{(n)}$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} :ab:_{(n)} &= \sum_{\substack{m,k\in\mathbf{Z}\\ m+k=n-1}} :a_{(m)}b_{(k)}: \\ &= \sum_{m\geqq 0} a_{(-m-1)}b_{(n+m)} + (-1)^{|a||b|}\sum_{m\geqq 0} b_{(n-m-1)}a_{(m)} \end{aligned}$$

ここで

$$:a_{(m)}b_{(n)}: := \begin{cases} a_{(m)}b_{(n)} & (m<0 \text{ のとき}), \\ (-1)^{|a||b|}b_{(n)}a_{(m)} & (m\geqq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さらに，一般に n 個の場 $a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$ の正規積を（n について帰納的に）次の式で定義する：

$$:a^{(1)}a^{(2)}\cdots a^{(n)}: := :a^{(1)}(:a^{(2)}\cdots a^{(n)}:):$$

正規積は非可換であり，非結合的である．そのために計算にはかなり細かい注意を払う必要がある．正規積の作用素積を計算する際に重要な**ヴィックの定理**は，λブラケットを用いると非常にきれいな形で表示される ([5], [16])：

命題 2.1.　1)　(ヴィックの定理)

$$[a_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]c: + (-1)^{|a||b|} :b[a_\lambda c]: + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c]d\mu$$

2)　$$:ab: - (-1)^{|a||b|} :ba: = -\int_0^{-\partial} [a_\lambda b]d\lambda$$ □

ヴィラソロ場 $L(z)$ が与えられていて，場 $a(z)$ と $L(z)$ との λ ブラケットが

$$[L_\lambda a] = (\partial + \lambda\Delta)a + O(\lambda^2) \qquad (\Delta\in\mathbf{C})$$

の形であるとき，Δ を a の“**コンフォーマル・ウェイト**”という．特に

$$[L_\lambda a] \ = \ (\partial + \lambda\Delta)a$$

のときに $a(z)$ を**プライマリー場** (primary field) と呼ぶ．$a(z)$ がコンフォーマル・ウェイト Δ の場であるときには，そのウェイト Δ を用いて

$$a(z) \ = \sum_{n\in-\Delta+\mathbf{Z}} a_n z^{-n-\Delta}$$

と書くと便利なことがしばしばある．$a_{(n)}$ と a_n は当然のことながら次の簡単な関係で結ばれている：

$$a_n \ = \ a_{(n+\Delta-1)}.$$

λ ブラケットから普通の（スーパー）ブラケット積は次の公式によって得られる：

命題 2.2.　$[a_\lambda b] = \sum_{j=0}^{N} \frac{\lambda^j}{j!} X^{[j]}$，として $X^{[j]}(z)$ を

$$X^{[j]} \ = \ \sum_{n\in\mathbf{Z}} X^{[j]}_{(n)} z^{-n-1} \ = \sum_{n\in-\Delta_a-\Delta_b+\mathbf{Z}} X^{[j]}_n z^{-n-(\Delta_a+\Delta_b-1-j)}$$

と書くとき，

$$1) \quad [a_{(m)}, b_{(n)}] \ = \ \sum_{j=0}^{N} \binom{m}{j} X^{[j]}_{(m+n-j)}$$

$$2) \quad [a_m, b_n] \ = \ \sum_{j=0}^{N} \binom{m+\Delta_a-1}{j} X^{[j]}_{m+n}$$

□

この命題の 1) で特に $m=0$ とおくことによって次の系が得られるが，この系 2.1 は次の 3 節において $d_{(0)}$ の作用で消える元を調べるために極めて重要な役目をする：

系 2.1. $[a_\lambda b] = O(\lambda)$ すなわち，$[a_\lambda b]$ が λ について定数項を持たないならば，

$$[a_{(0)}, b_{(n)}] \;=\; 0 \quad (\forall n \in \mathbf{Z})$$

□

3 Drinfeld-Sokolov リダクションの量子化

この節では，アフィン・スーパー・リー環の **Drinfeld-Sokolov リダクションの量子化**により W 代数を構成する方法の概略を解説する．

そのためにはスーパー・リー環 $\mathfrak{g}$ だけでなく，$\mathfrak{g}$ の中に sl_2 トリプル (x, e, f) をとる．すなわち次のデータ

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ ： スーパー不変かつスーパー対称な偶かつ非退化な内積[5] $(\;|\;)$ をもつ有限次元単純スーパー・リー環

(2) $\mathfrak{g}$ の偶部分 $\mathfrak{g}_{even}$ に属する元 x, e, f で，次の条件 (i), (ii) を満たすもの

(i) $x \in \mathfrak{h}, \qquad e \in \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad f \in \sum_{\alpha\in\Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$

(ii) $[x, e] = e, \qquad [x, f] = -f, \qquad [e, f] = x$

が与えられたとする．このとき，$sl(2, \mathrm{C})$ の表現論[6]より，$\mathrm{ad}(x)$ の固有値はすべて整数または半整数である．そこで，$\mathrm{ad}(x)$ の固有値 j の固有空間を $\mathfrak{g}_j$ とおけば，$\mathfrak{g}$ は次のように直和分解する：

$$\mathfrak{g} \;=\; \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_j\,.$$

[5] これらの用語については，たとえば [25] §1.5 を参照.

[6] この節で必要とする $sl(2, \mathrm{C})$ の表現の性質は，たとえば [25] の §1.2 の程度のことで十分である.

便宜上次のようにおく：

$$\mathfrak{g}_{\geqq 0} := \sum_{j\geqq 0} \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{g}_+ := \sum_{j>0} \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{g}_{\leqq 0} := \sum_{j\leqq 0} \mathfrak{g}_j, \quad \mathfrak{g}_- := \sum_{j<0} \mathfrak{g}_j .$$

このとき，$\mathfrak{g}$ において f と可換な元全体のなす部分スーパー・リー環

$$\mathfrak{g}^f \;:=\; \{v \in \mathfrak{g} \;;\; [f, v] = 0\}$$

は $\mathfrak{g}_{\leqq 0}$ に含まれ，

$$\mathfrak{g}^f \;=\; \sum_{j\leqq 0} (\mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}_j)$$

と分解する．

$\mathfrak{g}$ の基底 $\{u_i\}_{i\in S}$ を，各 u_i が $\mathrm{ad}(x)$ の固有ベクトルであるようにとり，添数集合 S の部分集合 S_j を

$$\{u_i\}_{i\in S_j} \text{ は } \mathfrak{g}_j \text{ の基底，すなわち} \qquad \mathfrak{g}_j \;=\; \sum_{i\in S_j} \mathbf{C} u_i$$

により定め，

$$S_+ \;:=\; \bigcup_{j>0} S_j \tag{3.1}$$

とおく．そして，

(1)　各 $i \in S_+$ について，u_i とは逆のパリティ[7]の自由場

$$\varphi_i(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi_{i(n)} z^{-n-1} \qquad と \qquad \varphi_i^*(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi^*_{i(n)} z^{-n-1}$$

(2)　各 $i \in S_{1/2}$ について，u_i と同じパリティの自由場

$$\phi_i(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \phi_{i(n)} z^{-n-1}$$

[7] u_i が偶元なら φ_i, φ_i^* はフェルミオンで，u_i が奇元なら φ_i，φ_i^* はボゾン．

を次の (反)交換関係を満たすように選ぶ：

(i) $[\varphi_{i\lambda}\varphi_j] = [\varphi_{i\lambda}^*\varphi_j^*] = 0, \qquad [\varphi_{i\lambda}\varphi_j^*] = \delta_{i,j}\,,$

(ii) $[\phi_{i\lambda}\phi_j] = (f|[u_i,\, u_j])\,.$

$\varphi_{i(n)}$, $\varphi^*_{i(n)}$ ($i \in S_+$, $n \in \mathbf{Z}$) の生成するクリフォード代数を A^{ch} とおき，$\phi_{i(n)}$ ($i \in S_{1/2}$, $n \in \mathbf{Z}$) の生成するクリフォード代数を A^{ne} とおく[8]．そして，**電荷** (charge) を

$$\mathrm{charge}(\varphi_{i(n)}) := 1, \quad \mathrm{charge}(\varphi^*_{i(n)}) := -1, \quad \mathrm{charge}(\phi_{i(n)}) := 0$$

で定めると，$A := A^{ch} \otimes A^{ne}$ は次のように "**電荷分解**" する：

$$A \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} A_j \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} (A_j^{ch} \otimes A^{ne})$$

ここで，A_j, A_j^{ch} は 電荷 $= j$ の空間である．

さて $\mathfrak{g}$ の レベル $= K$ の頂点代数を $V_K(\mathfrak{g})$ として，

$$C(\mathfrak{g}, x, f)_K \;:=\; V_K(\mathfrak{g}) \otimes A^{ch} \otimes A^{ne} \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} V_K(\mathfrak{g}) \otimes A_j \tag{3.2}$$

とおく．これに境界作用素 $d_{(0)}$ を与えて，チェイン複体を作ろうというのである．そのために次の "境界場" を考える：

$$\begin{aligned} d(z) \;&=\; \sum_{n\in\mathbf{Z}} d_{(n)} z^{-n-1} \\ &:=\; \sum_{i\in S_+} (-1)^{|u_i|} u_i \otimes \varphi_i^* - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k\in S_+} (-1)^{|u_i||u_k|} c_{ij}^k \varphi_k \varphi_i^* \varphi_j^* \\ &\qquad + \sum_{i\in S_+} (f|u_i)\varphi_i^* + \sum_{i\in S_{1/2}} \varphi_i^* \phi_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで c_{ij}^k は $\mathfrak{g}$ の基底 $\{u_i\}_{i\in S}$ に関する構造定数，すなわち

[8] ここで用いている記号 A^{ch}, A^{ne} における右肩の添字はそれぞれ charge, neutral の意味である．

$$[u_i, u_j] = \sum_{k\in S} c_{ij}^k u_k$$

である．このとき，$d(z)$ について次のことが成り立つ：

補題 3.1.　$[d_\lambda d] = 0$

この補題 3.1 と命題 2.2 により特に $[d_{(0)}, d_{(0)}] = 0$ である．$d_{(0)}$ は奇作用素であるから，これは $\left(d_{(0)}\right)^2 = 0$ を意味する．そして $d_{(0)}$ は電荷を一つ減らす働きをするから，$C(\mathfrak{g}, x, f)_K$ の電荷分解は $d_{(0)}$ を境界作用素とするチェイン複体

$$\left(C(\mathfrak{g}, x, f)_K = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} V_K(\mathfrak{g}) \otimes A_j\,,\ d_{(0)}\right)$$

である．このチェイン複体の 0 次のホモロジー空間を $W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ とおく．$d_{(0)}$ の作用で $=0$ となる元すなわち“サイクル”を求めるためには，系 2.1 により，$[d_\lambda a] = O(\lambda)$ を満たす場 $a(z)$ を求めればよい．

0 次ホモロジー空間を調べるために，まず次の場[9] $L(z)$ を考えよう：

$$L(z) = L^{\mathfrak{g}}(z) + \partial x(z) + L^{ch}(z) + L^{ne}(z)$$

ここで

$$\begin{aligned} L^{\mathfrak{g}}(z) &= \frac{1}{2(K+h^\vee)} \sum_{i\in S} :u^i u_i: \\ L^{ch}(z) &= \sum_{i\in S_+} \left\{(-1)^{|u_i|} m_i :(\partial\varphi_i)\varphi_i^*: + (1-m_i)(\partial\varphi_i^*)\varphi_i :\right\} \\ L^{ne}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{i\in S_{1/2}} :(\partial\phi^i)\phi_i: \end{aligned}$$

であり，$\{u^i\}_{i\in S}$ は $\{u_i\}_{i\in S}$ の双対基底，すなわち $(u_i|u^j) = \delta_{i,j}$ を満たすように選んだ $\mathfrak{g}$ の基底である．また $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の**双対コクスター数**である．こ

[9] あとで命題 3.1 から分かるように $L(z)$ は実はヴィラソロ場である．

のとき，$L(z)$ と各々の場との λ ブラケットは次のようになる：

$$
\begin{aligned}
[L_\lambda X] &= (\partial + (1-j)\lambda)X && (X \in \mathfrak{g}_j) \\
[L_\lambda \varphi_i] &= (\partial + (1-m_i)\lambda)\varphi_i && (u_i \in \mathfrak{g}_{m_i}) \\
[L_\lambda \varphi_i^*] &= (\partial + m_i\lambda)\varphi_i^* && (u_i \in \mathfrak{g}_{m_i}) \\
[L_\lambda \phi_i] &= (\partial + \tfrac{\lambda}{2})\phi_i && (i \in S_{1/2})
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

これより，これらの場はすべて $L(z)$ に関してプライマリー場であることが分かる．(3.4) と $d(z)$ の定義式 (3.3) から

$$[L_\lambda d] = (\partial + \lambda)d$$

が得られ，これと λ ブラケットの歪対称性とから

$$[d_\lambda L] = \lambda d$$

となる．そこで 系 2.1 により，すべての $n \in \mathbf{Z}$ について

$$[d_{(0)}, L_n] = 0$$

が成り立ち，したがって $L_n \in W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ である．

さらに，正規積の計算を素直に実行することによって次の命題が検証される：

命題 3.1. $$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{\lambda^3}{12}c(K)$$

ここで $c(K)$ は次の式で与えられる：

$$
\begin{aligned}
c(K) &= \frac{K}{K+h^\vee}\cdot \mathrm{sdim}\mathfrak{g} - 12K(x|x) \\
&\quad -2\sum_{i\in S_+}(-1)^{|u_i|}(6m_i^2 - 6m_i + 1) - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{sdim}\mathfrak{g}_{1/2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

□

すなわち $L(z)$ は**中心電荷** (central charge) が $c(K)$ のヴィラソロ場である．このようにして $W(\mathfrak{g},x,f)_K$ はヴィラソロ場 $L(z)$ を含むことが分かる．

ホモロジー空間の計算を進めるために，$\mathfrak{g}$ の各元 v について，

$$J^{(v)} = v + \sum_{j,k\in S_+} (-1)^{|u_k|} c^k_{v,j} : \varphi_k \varphi^*_j :$$

とおくと ([12])，複体 $C(\mathfrak{g},x,f)_K$ は $J^{(v)}$ $(v \in \mathfrak{g})$ と φ_i, φ^*_i, ϕ_i たちで生成されるが，$d(z)$ の作用は次のようになる：

補題 3.2.　1) $v \in \mathfrak{g}$　のとき，

$$\begin{aligned}[d_\lambda J^{(v)}] &= \sum_{j\in S_+} (f|[v,u_j])\varphi^*_j + \sum_{\substack{j\in S_+\\ [v,u_j]\in \mathfrak{g}_{1/2}}} (-1)^{|v|(|u_j|+1)} \varphi^*_j \phi_{[v,u_j]} \\ &\quad - \sum_{\substack{j\in S_+\\ [v,u_j]\in \mathfrak{g}_{\leqq 0}}} (-1)^{|u_i|(|v|+1)} : \varphi^*_j J^{([v,u_j])} : \\ &\quad + (\partial+\lambda) \sum_{j\in S_+} \left\{ K(v|u_j) + \mathrm{str}_{\mathfrak{g}_{>0}}(\mathrm{ad}v)(\mathrm{ad}u_j) \right\} \varphi^*_j \end{aligned}$$

2)　$[d_\lambda \varphi_i] = J^{(u_i)} + (f|u_i) + (-1)^{|u_i|}\phi_i$

3)　$[d_\lambda \varphi^*_k] = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j\in S_+} (-1)^{|u_i||u_k|} c^k_{ij} \varphi^*_i \varphi^*_j$

4)　$[d_\lambda \phi_i] = \displaystyle\sum_{k\in S_{1/2}} (f|[u_k,u_i])\varphi^*_k$

□

この補題 3.2 の 2) より

$$J^{(u_i)} + (f|u_i) + (-1)^{|u_i|}\phi_i$$

は $d_{(0)}$ の像に入ること，すなわち完全元であることが分かる．正確に言えば，

$$\begin{cases} i \in S_{1/2} \implies J^{(u_i)} + (-1)^{|u_i|}\phi_i & : \ \text{完全元} \\ i \in S_{\geqq 1} \implies J^{(u_i)} + (f|u_i) & : \ \text{完全元} \end{cases}$$

である．また，$[d_\lambda J^{(v)}]$ の式は少し複雑であるが，右辺に現れる $J^{(u)}$ は $u \in \mathfrak{g}_{\leqq 0}$ となる u についてのみであることに注目しよう．そうするとこの補題 3.2 から，次の部分複体 C' と C'' が見える：

$$
C' \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ll} J^{(u_i)} + (-1)^{|u_i|}\phi_i & (i \in S_{1/2}) \\ J^{(u_i)} & (i \in S_{\geqq 1}) \\ \varphi_i & (i \in S_+) \end{array} \right\} \text{ の生成する部分複体,}
$$

$$
C'' \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ll} J^{(v)} & (v \in \mathfrak{g}_{\leqq 0}) \\ \varphi_i^* & (i \in S_+) \\ \phi_i & (i \in S_{1/2}) \end{array} \right\} \text{ の生成する部分複体.}
$$

このとき C は

$$
C \;=\; C' \otimes C'' \tag{3.6}
$$

と分解し，かつ C' のホモロジーが

$$
H_0(C') = \mathbf{C}, \qquad H_j(C') = \{0\} \quad (j \neq 0)
$$

であることから

$$
C \text{ のホモロジー} \;=\; C'' \text{ のホモロジー}
$$

となる．そこで C'' に着目しよう．C'' は φ_i を含まないから，C'' には電荷が正の元は存在しない．したがって C'' の電荷分解は

$$
C'' \;=\; \bigoplus_{j \leqq 0} C''_j
$$

の形になる．そして $d_{(0)}$ は電荷を一つ減らす働きをするので，C''_0 に属するサイクルは $d_{(0)}$ の像に含まれることなく，そのまま 0 次ホモロジー空間の元となる．すなわち

定理 3.1.　$H_0(C) \;\cong\; H_0(C'') \;=\; \{\xi \in C''_0 \;;\; d_{(0)}\xi = 0 \;\}$

したがって，$W(\mathfrak{g},x,f)_K$ は部分複体 C'' の（商空間でなく）部分空間として実現できる．そして C''_0 上の $d_{(0)}$ の作用を見ることによって，次の定理が得られる：

定理 3.2.　1)　$\mathfrak{g}^f_{-j} := \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}_{-j}$　の各元 v について，コンフォーマル・ウェイトが $1+j$ のサイクル

$$J^{\{v\}} \;=\; J^{(v)} + \;\cdots$$

が存在する．ここで上式における “$\cdots$ ” の部分は

$$J^{(a)} \quad \left(a \in \sum_{-j<i\leqq 0} \mathfrak{g}_i\right), \qquad \phi_i \quad (i \in S_{1/2})$$

たちの正規積の 1 次結合である．

2)　$W(\mathfrak{g},x,f)_K$　は　$\{J^{\{v\}}\ ;\ v \in \mathfrak{g}^f\}$　で生成される．　□

$J^{\{v\}}$ の具体的な表示式を求めることも重要な問題であるが，一般には難しくて未だ知られていない．特に $v \in \mathfrak{g}^f_0$，$v \in \mathfrak{g}^f_{-1/2}$ のときには，$J^{\{v\}}$ は次の式で与えられる：

定理 3.3.　1)　$v \in \mathfrak{g}^f_0$ のとき，

$$J^{\{v\}} \;=\; J^{(v)} - \frac{1}{2}\sum_{i,j\in S_{1/2}} (-1)^{|u_i|} c^i_{v,j} :\phi_i\phi^j:$$

2)　$v \in \mathfrak{g}^f_{-1/2}$ のとき，

$$\begin{aligned} J^{\{v\}} \;=\; & J^{(v)} - \sum_{i\in S_{1/2}} (-1)^{|u_i|}\phi^i J^{([u_i,v])} \\ & - \sum_{i\in S_{1/2}} \left\{K(v|u_i) + \mathrm{str}_{\mathfrak{g}_+}(\mathrm{ad}v)(\mathrm{ad}u_i)\right\}\partial\phi^i \\ & - \frac{(-1)^{|v|}}{3}\sum_{i,j\in S_{1/2}} :\phi^i\phi^j\phi_{[u_j,[u_i,v]]}: \end{aligned}$$

□

ここで，$J^{\{v\}}$ は $v \in \mathfrak{g}^f_{-j}$ $(j = 0, \frac{1}{2})$ については一意的に定まるが，$j \geqq 1$ のときには一意的ではないことに留意しよう．それは $J^{(a)}(z)$ $(a \in \mathfrak{g}_{-j})$ と $\phi_i(z)$ のコンフォーマル・ウェイトがそれぞれ $1 + j$ と $\frac{1}{2}$ であることから容易に分かる．

さて，このように $J^{\{v\}}$ を具体的に表示する式が得られると，次のような御利益が発生する．

$J^{\{v\}}$ の表示式は $J^{(u)}$ $(u \in \mathfrak{g}_{\leqq 0})$ と ϕ_i $(i \in S_{1/2})$ で書かれているが，このうちの $J^{(u)}$ $(u \in \mathfrak{g}_{<0})$ を含む項をすべて消去することによって W 代数の**自由場表現**を構成することができる．すなわち

$J^{\{v\}\text{free}}$:= $J^{\{v\}}$ の表示式から
$J^{(u)}$ $(u \in \mathfrak{g}_{<0})$ を含む項をすべて消しゴムで消去したもの

とおくと，$J^{\{v\}\text{free}}$ たちの λ ブラケットは $J^{\{v\}}$ たちの λ ブラケットと同じであり[10]，したがって $J^{\{v\}\text{free}}$ $(v \in \mathfrak{g}^f)$ の生成する頂点代数は $W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ と同型である．ところで，$J^{\{v\}\text{free}}$ は $J^{(u)}$ $(u \in \mathfrak{g}_0)$ と ϕ_i $(i \in S_{1/2})$ だけで書かれているので，$\widehat{\mathfrak{g}}_0$ の表現と自由フェルミオン（またはボゾン）ϕ_i $(i \in S_{1/2})$ の表現が与えられると，それから直ちに $W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ の表現が得られるということになる．このときに，$\widehat{\mathfrak{g}}_0$ の表現として自由場表現[11]をとれば，$W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ の自由場表現が得られる．この意味で，この表現の構成法を自由場表現と呼ぶ．このことについての詳細や具体的な例については [27] などを参照されたい．

W 代数 $W(\mathfrak{g}, x, f)_K$ の表現を構成する方法として，上に述べた自由場表現とは別に，W 代数の構成と同じようにホモロジーを用いる方法がある．(π, V)

[10] $J^{\{v\}}$ はもちろんサイクルであるが，$J^{\{v\}\text{free}}$ は（$v \in \mathfrak{g}^f_{<0}$ については）サイクルではないことに注意しよう．ここでの主張が成立する理由は，定理 3.1 の直前に述べた事情によりホモロジーの束縛から解放されたことにある．

[11] これについては [10], [11], [23] などを参照．

をアフィン・(スーパー) リー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト表現とする．ここで V はベクトル空間であり，$\hat{\mathfrak{g}}$ の各元 X について $\pi(X)$ は V 上の線型作用素である．このとき (3.2) における A^{ch} と A^{ne} をフォック空間 F^{ch}, F^{ne} で置き換えて

$$C(V,x,f) \;:=\; V\otimes F^{ch}\otimes F^{ne} \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} V\otimes F_j$$

とおき，この上に作用する境界場 $d^{(\pi)}(z)$ を(3.3) と同様に次の式で定義する：

$$\begin{aligned} d^{(\pi)}(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} d^{(\pi)}_{(n)} z^{-n-1} \\ &:= \sum_{i\in S_+} (-1)^{|u_i|}\pi(u_i)\otimes\varphi_i^* - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k\in S_+} (-1)^{|u_i||u_k|} c_{ij}^k \varphi_k\varphi_i^*\varphi_j^* \\ &\qquad + \sum_{i\in S_+} (f|u_i)\varphi_i^* + \sum_{i\in S_{1/2}} \varphi_i^*\phi_i \end{aligned} \tag{3.7}$$

このとき 補題 3.1 と同様に

$$[d^{(\pi)}{}_\lambda d^{(\pi)}] \;=\; 0 \qquad したがって \qquad \left(d^{(\pi)}_{(0)}\right)^2 \;=\; 0$$

が成り立ち，チェイン複体ができる．このチェイン複体の j 次ホモロジー空間を $H_j(V)$ とおくと，$H_j(V)$ には W 代数 $W(\mathfrak{g},x,f)_K$ が自然に作用する．このようにして，$\hat{\mathfrak{g}}$ 加群 V から $W(\mathfrak{g},x,f)_K$ 加群 $H_j(V)$ $(j\in\mathbf{Z})$ が得られる．この構成法は，W 代数 $W(\mathfrak{g},x,f)_K$ のモジュラー性質をもつ表現を研究する上で非常に重要である．それと同時にこの方法では，ホモロジー空間の消滅または非消滅を調べることが極めて重要かつ基本的な問題になる．f が一般の巾零元のときには未だ未解決であるが，ホモロジー空間の消滅・非消滅および $H_j(V)$ の既約性などの重要な問題について，荒川知幸氏の研究 [1], [2], [3], [4] によって近年大きな進展が得られている．

4　良い R 対

3 節においては W 代数を構成するためにまず最初に sl_2 トリプル (x,e,f) を採ってきたけれど，3 節の W 代数の構成には e は何の働きもしていなかったこと[12] に気がつかれたと思う．そこで，e の存在を仮定しないで x と f だけを考えよう．すなわち，(x,f) が次の五つの条件

(i)　f は巾零元,

(ii)　$\mathrm{ad}(x)$ は対角化可能で，固有値はすべて実数,

(iii)　$[x, f] = -f$

(iv)　$\mathrm{ad}(f) : \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$ は $\begin{cases} \text{単射} & (j \geqq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ \text{全射} & (j \leqq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$

(v)　$\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{g}_{<1/2}$

を満たすときに **“良い R 対”** (good **R**-pair) と呼ぶことにしよう．そしてさらに $\mathrm{ad}(x)$ の固有値がすべて $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ に含まれるときに **“良い $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ 対”** または単に **“良い対”** (good pair) と呼び，$\mathrm{ad}(x)$ の固有値がすべて整数であるときに **“良い整対”** (good integral pair) と呼ぶことにしよう．(x,e,f) が sl_2 トリプルのときにはもちろん (x,f) は良い対である[13].

R 対のときには，(3.1) の S_+ の定義を

$$S_+ := \bigcup_{j \geqq 1/2} S_j$$

で置き換えて，3 節と同様の方法でチェイン複体を作り，$W(\mathfrak{g},x,f)_K$ を構成することができる．しかし，$\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ 対でない **R** 対のときには，(3.6) のように二つの部分複体の積に分解しない．また自由場表現もできない．にもかかわらず，**R** 対 について次の定理が成立する ([6])：

---

[12] しかし，表現論の或る種の問題たとえば行列式公式などを導くためには，sl_2 トリプルであることが必要なこともある．

[13] 良い対の分類については [8] を参照．

定理 4.1.　$W(\mathfrak{g},x,f)_K$ は f の $\mathrm{Ad}(G)$ 共役類のみから定まり，良い **R** 対 (x,f) の選び方によらない． □

すなわち，良い **R** 対を取り替えても，$W(\mathfrak{g},x,f)_K$ は同型である．そうなると，sl_2 トリプルにこだわらないで，うまい **R** 対を使うことによって何かいいことが得られないだろうか？ と思いたくなる．$S_{1/2}$ を小さくすれば W 代数の構成に登場する自由場の個数が減り，具体的な計算がしやすくなるようにも思える．実際に，sl_2 トリプルでは困難であるように思えた Zhu 代数の表現の構造が，ランクの低いときには，うまい **R** 対を用いた腕ずくの計算 (brute force) によって解明できるということも起こる．

特に，良い整対は（それが存在する場合には）Zhu 代数の表現の研究で非常に重要な働きをする．

5　捩れた W 代数

ここでスーパー・コンフォーマル代数の例として **N=2 スーパー・コンフォーマル代数**を見よう．N=2 スーパー・コンフォーマル代数は

$$\begin{cases} L_n,\ J_n & (n\in\mathbf{Z}) & : & \text{偶元} \\ G_n^{\pm} & (n\in\frac{1}{2}+\mathbf{Z}) & : & \text{奇元} \\ c & & : & \text{中心元} \end{cases}$$

の張るベクトル空間に 表 1 の（スーパー）ブラケット積を入れて得られるスーパー・リー環である．

これらの元の生成函数 (generating functions) として，次の場を考えよう：

$$\begin{aligned} L(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2} \\ J(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} J_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

表 1　N=2 スーパー・コンフォーマル代数のブラケット積の表

	L_n	J_n	G_n^+	G_n^-
L_m	$(m-n)L_{m+n}$ $+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c$	$-nJ_{m+n}$	$(\frac{m}{2}-n)G_{m+n}^+$	$(\frac{m}{2}-n)G_{m+n}^-$
J_m	mJ_{m+n}	$\frac{m}{3}\delta_{m+n,0}c$	G_{m+n}^+	$-G_{m+n}^-$
G_m^+	$(m-\frac{n}{2})G_{m+n}^+$	$-G_{m+n}^+$	0	$L_{m+n}+\frac{m-n}{2}J_{m+n}$ $+\frac{c}{6}(m^2-\frac{1}{4})\delta_{m+n,0}$
G_m^-	$(m-\frac{n}{2})G_{m+n}^-$	G_{m+n}^-	$L_{m+n}-\frac{m-n}{2}J_{m+n}$ $+\frac{c}{6}(m^2-\frac{1}{4})\delta_{m+n,0}$	0

$$G^{\pm}(z) \;=\; \sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbf{Z}} G_n^{\pm} z^{-n-\frac{3}{2}}$$

このとき，表 1 のブラケット積を場の λ ブラケットに書き換えたものは表 2 のようになる．

表 2　N=2 スーパー・コンフォーマル場の λ ブラケットの表

	L	J	G^+	G^-
L	$(\partial+2\lambda)L+\frac{\lambda^3}{12}c$	$(\partial+\lambda)J$	$(\partial+\frac{3}{2}\lambda)G^+$	$(\partial+\frac{3}{2}\lambda)G^-$
J	λJ	$\frac{\lambda}{3}c$	G^+	$-G^-$
G^+	$\left(\frac{\partial}{2}+\frac{3}{2}\lambda\right)G^+$	$-G^+$	0	$L+\frac{1}{2}(\partial+2\lambda)J+\frac{\lambda^2}{6}c$
G^-	$\left(\frac{\partial}{2}+\frac{3}{2}\lambda\right)G^-$	G^-	$L-\frac{1}{2}(\partial+2\lambda)J+\frac{\lambda^2}{6}c$	0

この例では，$G_n^{\pm}$ の添字 n は整数ではなく半整数（奇数の $\frac{1}{2}$ 倍）である．すなわち，$G^{\pm}(z)$ は **Neveu-Schwarz** 型の場である．しかし，表 1 におい

て，奇元 $G_n^{\pm}$ の添字 n の動く領域を $n \in \mathbf{Z}$ に変更しても，やはりスーパー・リー環になる．これは **Ramond 型**の N=2 スーパー・コンフォーマル代数と呼ばれる．

ただ単に添字の動く領域の変更だけであるが，表現論は大きな影響を受ける．例えば $G_n^{\pm}$ の添字 n の動く範囲を $n \in \mathbf{Z}$ に変更したもの，すなわち Ramond 型 N=2 スーパー・コンフォーマル代数では，ヴァーマ加群 $M(\Lambda)$ の最高ウェイトのウェイト空間 $M(\Lambda)_\Lambda$ が 2 次元になる．そして，

$$[G_0^+, G_0^-] \;=\; L_0 - \frac{c}{24}$$

となるために，G_0^+ と G_0^- を対等に取り扱うことはできなくて，$G_0^{\pm}$ のうちのどちらか一方を生成作用素，他方を消滅作用素と指定する必要性が生じる．

ここでは簡単のために，N=2 スーパー・コンフォーマル代数を例に挙げて説明したが，一般のスーパー・コンフォーマル代数でも同様の事情が発生する．しかし 3 節に述べた W 代数の構成法では Neveu-Schwarz 型のスーパー・コンフォーマル代数しか得られない．このような Ramond 型を得るにはどのようにすればよいであろうか？

実は，このような Ramond 型のスーパー・コンフォーマル代数の取り扱いは “**捩**(ねじ)**れた** (twisted)” **頂点代数**において可能になる．Ramond 型は “捩り方” のうちでも特別なものであって，スーパー・コンフォーマル代数の “捩り” は Ramond 型に限定されない．例えば N=2 スーパー・コンフォーマル代数については，次のような捩りが可能である．

例 5.1. $a \in \mathbf{C}$ を（任意に）固定し，N=2 スーパー・コンフォーマル代数のブラケット積の表 1 において，

$$\begin{cases} G_n^+ \text{ の添字 } n \text{ の動く領域を } & n \in a + \mathbf{Z} \text{ に} \\ G_n^- \text{ の添字 } n \text{ の動く領域を } & n \in -a + \mathbf{Z} \text{ に} \end{cases}$$

変更してもスーパー・ヤコビ恒等式などはそのまま成立してスーパー・リー環になる．$a=\frac{1}{2}$ のときは元の N=2 スーパー・コンフォーマル代数そのものでNeveu-Schwarz 型であり，$a=0$ のときは Ramond 型の N=2 スーパー・コンフォーマル代数である． □

例 5.2. N=2 スーパー・コンフォーマル代数において，

$$G_n^{(1)} := G_n^+ + G_n^- , \qquad G_n^{(2)} := G_n^+ - G_n^-$$

とおくと，

$$\begin{cases} L_n, \quad G_n^{(1)} & (n \in \mathbf{Z}) \\ J_n, \quad G_n^{(2)} & (n \in \frac{1}{2} + \mathbf{Z}) \end{cases}$$

と c の張るベクトル空間はスーパー・リー環になる．

$$\begin{cases} G^{(1)}(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} G_n^{(1)} z^{-n-\frac{3}{2}} & \text{は Ramond 型} \\ G^{(2)}(z) = \sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbf{Z}} G_n^{(2)} z^{-n-\frac{3}{2}} & \text{は Neveu-Schwarz 型} \end{cases}$$

の奇場であるから，これは Neveu-Schwarz と Ramond の混在する N=2 スーパー・コンフォーマル代数である．通常の N=2 スーパー・コンフォーマル代数のカルタン部分環は $\mathbf{C}L_0 \oplus \mathbf{C}J_0$ であるが[14]，この例の場合には J_0 が存在しないために，カルタン部分環は退化して $\mathbf{C}L_0$（1 次元）であり，各ルート空間は 2 次元になる． □

有限次元 (スーパー) リー環 $\mathfrak{g}$ と，その自己同型 σ が与えられたときに，σ で捩ったアフィン化は周知である ([15])．それと類似の方法で，(σ が x と f を固定するときには) 3 節の量子化法を捩ることにより，捩れた W 代数 $W(\mathfrak{g},x,f,\sigma)_K$ を構成することができる ([21])．

[14] 例 5.1 のときでも同じ．

捩れた W 代数 $W(\mathfrak{g},x,f,\sigma)_K$ を生成するのは捩れた場である．それは普通の場の表示式 (2.1) において，n の動く領域を $\alpha+\mathbf{Z}$（α は一般に複素数でもよい）に変更したもの

$$a^{\mathrm{tw}}(z) \;:=\; \sum_{n\in\alpha+\mathbf{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}$$

である．生成作用素と消滅作用素を定義するために $s\in\alpha+\mathbf{Z}$ を指定して

$$\begin{cases} a_{(n)}:\text{消滅作用素} & \Longleftrightarrow \quad n-s\geqq 0 \\ a_{(n)}:\text{生成作用素} & \Longleftrightarrow \quad n-s<0 \end{cases}$$

とおく．そして (2.8b) の代わりに

$$\begin{aligned} a^{\mathrm{tw}}(z)_- \;&:=\; \sum_{\substack{n\in\alpha+\mathbf{Z}\\ n-s\geqq 0}} a_{(n)}z^{-n-1}, \\ a^{\mathrm{tw}}(z)_+ \;&:=\; \sum_{\substack{n\in\alpha+\mathbf{Z}\\ n-s<0}} a_{(n)}z^{-n-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

を用いて正規積を次の式で定義する：

$$:a^{\mathrm{tw}}(z)b^{\mathrm{tw}}(z): \;:=\; a^{\mathrm{tw}}(z)_+b^{\mathrm{tw}}(z)+(-1)^{|a||b|}b^{\mathrm{tw}}(z)a^{\mathrm{tw}}(z)_- . \tag{5.2}$$

次の公式は捩れ場の計算を行なう際の，頼もしい助っ人である ([5])：

命題 5.1.　1)　$:a^{\mathrm{tw}}(z)b^{\mathrm{tw}}(z): \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\binom{s}{j}\left(a(z)_{(j-1)}b(z)\right)^{\mathrm{tw}} z^{-j}$

2)　$:a(z)b(z):^{\mathrm{tw}} \;=\; :a^{\mathrm{tw}}(z)b^{\mathrm{tw}}(z): - \sum_{j=1}^{\infty}\binom{s}{j}\left(a(z)_{(j-1)}b(z)\right)^{\mathrm{tw}} z^{-j}$　□

この命題において $a(z)_{(n)}b(z)$ は $a(z)$ と $b(z)$ との**第 n 番目の作用素積** (n-th operator product) であり，次の式で定義される ([16])：

$$a(w)_{(n)}b(w) \;:= \\ \mathrm{Res}_{z=0}\Big\{\iota_{z,w}(z-w)^n a(z)b(w) - (-1)^{|a||b|}\iota_{w,z}(z-w)^n b(w)a(z)\Big\}$$

ここで $\mathrm{Res}_{z=0}\{\cdots\}$ は $z=0$ における留数，すなわち $\{\cdots\}$ 内をローラン展開したときの z^{-1} の係数を表す．また，2) は

$$:a(z)b(z): \;=\; a(z)_{(-1)}b(z)$$

を用いることによって，1) から従う．

すなわち，もろもろの計算を（捩れていない）普通の場で行なっておいて，最終的な段階でそれらを命題 5.1 の公式で一括変換すれば，捩れ場についてのほしい関係式が得られる，ということである．

Note 5.1. 実を言うと，このように生成・消滅の作用素を定めるための添字の境界値 s をズラせて，((2.8b) ではなく) (5.1) と (5.2) で定義された正規積を用いることは，捩りを入れない普通の W 代数においても，すでに必要だったのである．3 節の末尾に述べた W 代数の表現のホモロジー的構成において，$\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト表現と $W(\mathfrak{g},x,f)_K$ の最高ウェイト表現との間の "整合性" が成り立つためには，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のルートの正負を補正する必要があり，それに呼応して，各々の場について生成と消滅の境目の添字を補正する必要がある．そして，この補正を適切に行なうことによって

$$H_j(V) \;=\; \{0\} \qquad (j \neq 0 \text{ のとき})$$

が成り立つのではないかと予想される．

6　あとがきは未来に向かって

ここで解説した方法により，これまでに知られているスーパー・コンフォーマル代数は（捩れたものも含めて）ほとんどすべてが W 代数として構成される．表 3 にその具体例を挙げる．

この表において θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルートであり，$e_{-\theta}$ はルート $-\theta$ のルート・ベクトルである．ここで $\mathfrak{g}$ のディンキン図形は，最高ルートが偶ルートであるように選んでおく．$e_{-\theta}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 軌道は（0 でない）すべての巾零元の $\mathrm{Ad}(G)$ 軌道のうちで最小次元のものなので，$e_{-\theta}$（およびこの元に

表 3　W代数の例

$\mathfrak{g}$	f	$W(\mathfrak{g}, x, f)_K$
$sl(2, \mathbf{C})$	$e_{-\theta}$	ヴィラソロ代数
$sl(3, \mathbf{C})$	$e_{-\theta}$	Bershadsky-Polyakov 代数
$sl(n, \mathbf{C})$	主巾零元	Zamolodchikov W_n 代数
$osp(1\|2)$	$e_{-\theta}$	Neveu-Schwarz 代数
$sl(2\|1)$	$e_{-\theta}$	N=2 スーパー・コンフォーマル代数
$osp(3\|2)$	$e_{-\theta}$	N=3 スーパー・コンフォーマル代数
$osp(2m+1\|2)$ $(m \geqq 2)$	$e_{-\theta}$	Bershadsky-Knizhnik 代数
$sl(2\|2)/$(中心)	$e_{-\theta}$	N=4 スーパー・コンフォーマル代数
$D(2, 1; a)$	$e_{-\theta}$	ビッグ N=4 スーパー・コンフォーマル代数

Ad(G) の作用で共役な元）を**極小巾零元**ともいう．極小巾零元の W 代数 $W(\mathfrak{g}, x, e_{-\theta})_K$ は非常にきれいな構造をもち，それのヴァーマ加群の行列式公式や自由場表現が得られている ([17], [20], [21]).

この理論の利点は，これらのスーパー・コンフォーマル代数の表現を，$\hat{\mathfrak{g}}$ や $\hat{\mathfrak{g}}_0$ などのアフィン・スーパー・リー環の表現論から統一的に調べる道が開通したということにある．しかし，アフィン・スーパー・リー環の表現論について知られていることは未だほんの僅(わず)かであり ([18], [19], [26])，アフィン・リー環の雄大な理論 [15] に遙(はる)かに及ばない．アフィン・スーパー・リー環の表現論を開拓し，W 代数のプログラムを実行して，スーパー・コンフォーマル代数の表現論を作り上げることは今後の大きな課題である．

W 代数はアフィン・(スーパー) リー環から構成されるが，**"有限 W 代数"** はもとの有限次元(スーパー) リー環から直接構成される．有限 W 代数を構成するには，3 節の冒頭と同じように，$\mathfrak{g}$ に含まれる sl_2 トリプル (x, e, f) をとり，ad(x) による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解をこしらえて，S_j, S_+ を 3 節と同

じように定義する．そしてやはり $\{\varphi_j, \varphi_j^*\}_{j\in S_+}$ と $\{\phi_j\}_{j\in S_{1/2}}$ を導入するのであるが，これらは“場”ではなくて単なる粒子（ボソンまたはフェルミオン）であり，有限次元ハイゼンベルグ・リー環の元であって，次の交換関係を満たす：

$$\begin{cases} [\varphi_i, \varphi_j^*] = \delta_{i,j}, \qquad [\phi_i, \phi_j] = (f|[u_i, u_j]) \\ \text{その他のスーパー・ブラケット積} = 0 \end{cases}$$

そして $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環として

$$C^{fin}(\mathfrak{g}, x, f) := \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes A^{ch} \otimes A^{ne}$$

とおき，この上の奇線型作用素 d を (3.3) と類似の式

$$\begin{aligned} d &:= \sum_{i\in S_+} (-1)^{|u_i|} u_i \otimes \varphi_i^* - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k\in S_+} (-1)^{|u_i||u_k|} c_{ij}^k \varphi_k \varphi_i^* \varphi_j^* \\ &\quad + \sum_{i\in S_+} (f|u_i)\varphi_i^* + \sum_{i\in S_{1/2}} \varphi_i^* \phi_i \end{aligned}$$

で定義すると，補題 3.1 と同様に

$$[d, d] = 0 \qquad \text{したがって} \qquad d^2 = 0$$

が成り立ち，(d は電荷を一つ減らすので) 電荷分解によるチェイン複体

$$\left(C^{fin}(\mathfrak{g}, x, f) = \sum_{j\in \mathbf{Z}} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes A_j \ , d \right)$$

を得る．この複体の 0 次ホモロジー空間 $H_0(C^{fin})$ が有限 W 代数 $W^{fin}(\mathfrak{g}, x, f)$ である．

有限 W 代数の対語として，3 節で構成した W 代数を“アフィン W 代数”とも呼ぶ．これら両者の間に

有限 W 代数はアフィン W 代数の Zhu 代数である

という美しい関係が成り立つことが [7] によって発見された．ここで有限 W 代数とは実際にどのようなものであるかを，最も簡単な例で見てみよう：

例 6.1. $\mathfrak{g} = sl(3, \mathbf{C})$ として f を主巾零元とする．このとき $W^{fin}(\mathfrak{g}, x, f)$ はカシミール元 Ω と J, $G^{\pm}$ の生成する結合環で，これらの生成元の間の基本関係は次の通りである：

$$\begin{cases} [J, G^+] = 2G^+, \quad [J, G^-] = -2G^-, \quad [G^+, G^-] = \Omega + J^2, \\ \text{その他のブラケット積} \ = \ 0 \end{cases}$$

□

よく知られているように $sl(2, \mathbf{C})$ のブラケット積は

$$[J, G^{\pm}] \ = \ \pm 2G^{\pm}, \qquad [G^+, G^-] \ = \ J$$

である．有限 W 代数はこの例 6.1 のように「リー環に似て有限次元リー環にあらざるもの」であり，表現論は通常のリー環の場合とは異なる．有限 W 代数の表現論もまた，非常に興味のある研究分野である．[22] では “Slodowy スライスの量子化” という立場から有限 W 代数の表現を考察している．

ポアッソン・スーパー・コンフォーマル代数はスーパー・コンフォーマル代数の古典的極限であり ([7], [17])，技術的には，正規積を普通の積で置き換え，ヴィックの定理を**ポアッソン λ ブラケット** $\{\ _\lambda\ \}$ についての**ライプニッツ則**

$$\{a_\lambda bc\} \ = \ \{a_\lambda b\}c + (-1)^{|a||b|} b\{a_\lambda c\}$$

で置き換えたもので，普通のスーパー・コンフォーマル代数よりも計算が遙かに簡単である．スーパー・コンフォーマル代数の q 変形などのためには，ポアッソン・スーパー・コンフォーマル代数が良い手がかりを与えるのではないかとさえ思われる．

ポアッソン・コンフォーマル代数はこのように極めて簡単なものであるが，Lenard スキームや Drinfeld-Sokolov スキームにより非線型偏微分方程式と直

接関係していて重要な代数系である．それは，ポアッソン・コンフォーマル代数が古典的なW代数であること，すなわち量子化する前の Drinfeld-Sokolov リダクションから得られるものなので ([7])，当然と言えば当然のことでもあるが，このように，スーパー・コンフォーマル代数の理論はますます面白くなりつつある．

以下に主要な文献を挙げる．詳しい文献リストについては [7], [17], [20], [21], [27] などを参照されたい．ここには，それ以後の文献で重要なものと，本稿での説明に用いたもののみを挙げる．

参考文献

[1] T. Arakawa : Vanishing of cohomology associated to quantized Drinfeld-Sokolov reduction, *Int. Math. Res. Notices* **15** (2004), 729–767.

[2] T. Arakawa : Quantized reductions and irreducible representations of W-algebras, math.QA/0403477.

[3] T. Arakawa : Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture, *Duke Math. J.* **130** (2005), 435–478.

[4] T. Arakawa : Representation theory of W-algebras, math.QA/0506056.

[5] B. Bakalov and V.G. Kac : Field algebras, IMRN **3** (2003), 123–159.

[6] J. Brundan and S.M. Goodwin : Good grading polytopes, math.QA/0510215.

[7] A. De Sole and V.G. Kac : Finite vs affine W-algebras, math-ph/0511055.

[8] A.G. Elashvili and V.G. Kac : Classification of good gradings of simple Lie algebras, *Amer. Math. Soc. Transl* (2) Vol.213 (2005), 85–104.

[9] B. Feigin and E. Frenkel : Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction, *Phys. Lett.* **B 246** (1990), 75–81.

[10] B. Feigin and E. Frenkel : Affine Kac-Moody algebras, bozonization and resolutions, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 307–317.

[11] B. Feigin and E. Frenkel : Representations of affine Kac-Moody algebras and bosonization, *in "Physics and Mathematics of Strings ~ memorial volume of Vadim Knizhnik"*, World Scientific, 1990, 271–316.

[12] E. Frenkel and D. Ben-Zvi : *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, AMS monographs 88, 2001.

[13] E. Frenkel, V.G. Kac and M. Wakimoto : Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction, *Commun. Math. Phys.* **147** (1992), 295–328.

[14] V.G. Kac : Lie superalgebras, *Advances in Math.* **26** (1977), 8–96.

[15] V.G. Kac : *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, 1990.

[16] V.G. Kac : *Vertex Algebras for Beginners*, 2nd edition, University Lecture Series Vol.10, American Mathematical Society, 1998.

[17] V.G. Kac, S.-S. Roan and M. Wakimoto : Quantum reduction for affine superalgebras, *Commun. Math. Phys.* **241** (2003), 307–342.

[18] V.G. Kac and M. Wakimoto : Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory, *in "Lie Theory and Geometry ～ in honor of Bertram Kostant"* Progress in Math. Phys. Vol.123, Birkhäuser, 1994, 415–456.

[19] V.G. Kac and M. Wakimoto : Integrable highest weight modules over affine superalgebras and Appell's function, *Commun. Math. Phys.* **215** (2001), 631–682.

[20] V.G. Kac and M. Wakimoto : Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras, *Advances in Math.* **185** (2004), 400–458.

[21] V.G. Kac and M. Wakimoto : Quantum reduction in the twisted case, *Progress in Math.* Vol.237 (2005), Birkhäuser, 85–126.

[22] A. Premet : Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal, math.RT/0504343.

[23] M. Wakimoto : Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986), 605–609.

[24] M. Wakimoto : *Lectures on Infinite-Dimensional Lie Algebra*, World Scientific, 2001.

[25] 脇本 実 :『無限次元 Lie 環』, 岩波講座現代数学の展開 7, 岩波書店, 1999 年.

[26] 脇本 実 :「スーパー代数の表現論をめざして (I),(II)」,『数学』, 2002 年 1, 4 月.

[27] 脇本 実 :「W 代数の話 ～ スーパー・コンフォーマル代数の表現論へ」, サマー・スクール " 数理物理 2004 " 予稿集, 98–166.

編者 小嶋　泉　(おじま・いずみ)——京都大学数理解析研究所

著者 粟田英資　(あわた・ひでとし)——名古屋大学大学院多元数理科学研究科
植田好道　(うえだ・よしみち)——九州大学大学院数理学研究院
香取眞理　(かとり・まこと)——中央大学理工学部物理学科
種村秀紀　(たねむら・ひでき)——千葉大学理学部数学・情報数理学科
永尾太郎　(ながお・たろう)——名古屋大学大学院多元数理科学研究科
中村勝弘　(なかむら・かつひろ)——大阪市立大学大学院工学研究科
日合文雄　(ひあい・ふみお)——東北大学大学院情報科学研究科
山田裕理　(やまだ・ひろみち)——一橋大学大学院経済学研究科
吉荒　聡　(よしあら・さとし)——東京女子大学文理学部
脇本　実　(わきもと・みのる)——九州大学名誉教授

数理物理への誘い６——最新の動向をめぐって

2006 年 8 月 10 日　初 版 第 1 刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　小嶋　泉
発行者　西原昌幸
発行所　遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野 3 丁目 50-1
電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚 3 丁目 21-10
電話 (03)3947-1021　Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN4-434-08291-4